



Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

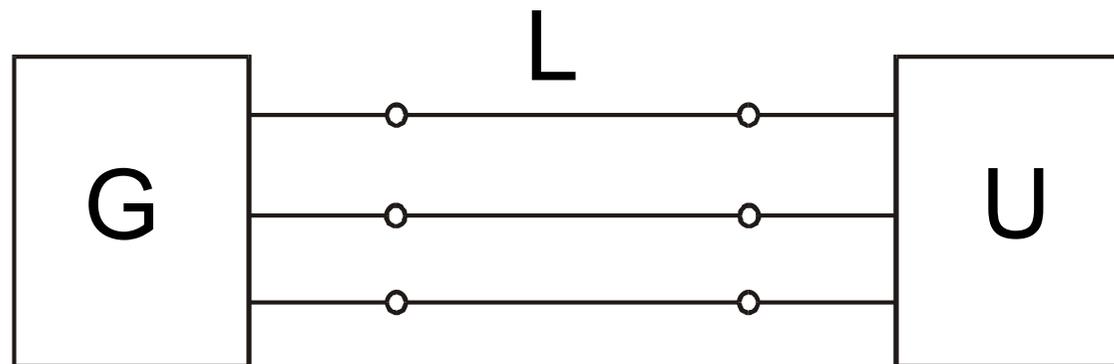
Corso di Elettrotecnica

Circuiti trifasi



Circuiti trifasi

Nelle applicazioni di potenza è frequente trovare, in regime P.A.S., **dispositivi a tre morsetti e linee a tre conduttori**

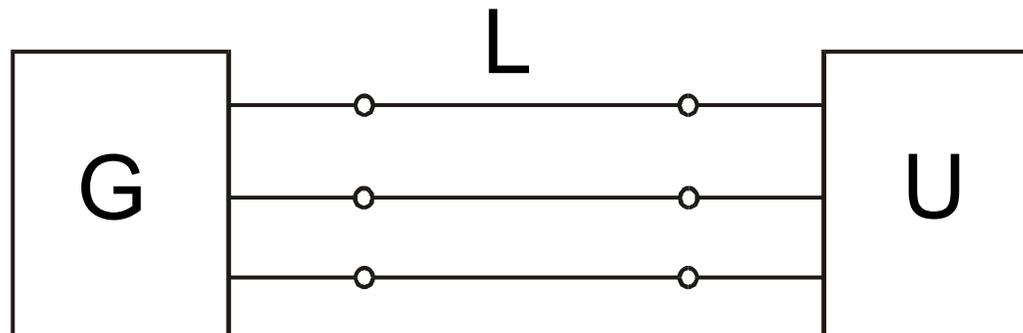


Costituiscono una soluzione razionale per convertire, trasmettere, utilizzare potenza elettrica.



Circuiti trifasi

I generatori (**alternatori**) sono costruttivamente compatti.



Le linee sono più economiche (minor peso) a pari potenze dissipata e trasportata dalla linea.

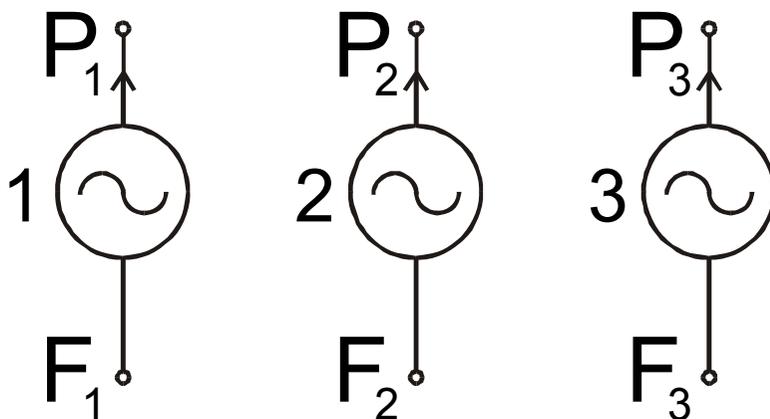
Gli utilizzatori (**motori asincroni**) sono affidabili e autoavvianti.



Circuiti trifasi

GENERATORE TRIFASE LINEARE DI TENSIONE O DI CORRENTE

Dispositivo a tre morsetti ottenuto da tre generatori monofasi ideali



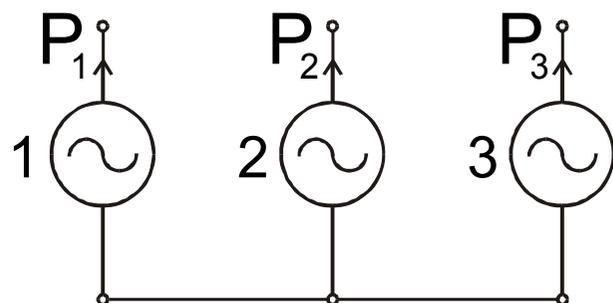
$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

(a_i corrente o tensione impressa)



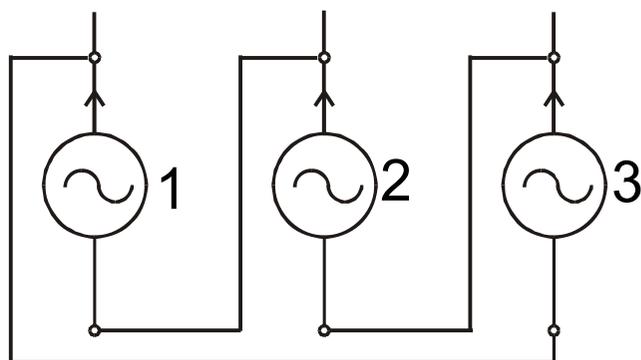
Circuiti trifasi

CONNESSI A STELLA (Y)

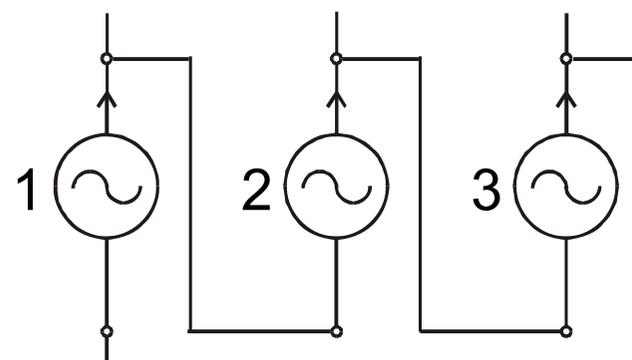


$$F_1 \equiv F_2 \equiv F_3$$

CONNESSI A TRIANGOLO (Δ)



$$F_1 \equiv P_2 \quad F_2 \equiv P_3 \quad F_3 \equiv P_1$$



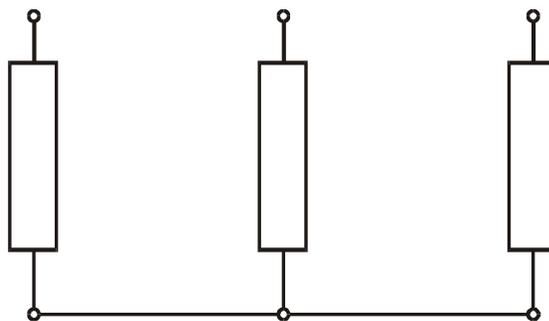
$$P_1 \equiv F_2 \quad P_2 \equiv F_3 \quad P_3 \equiv F_1$$



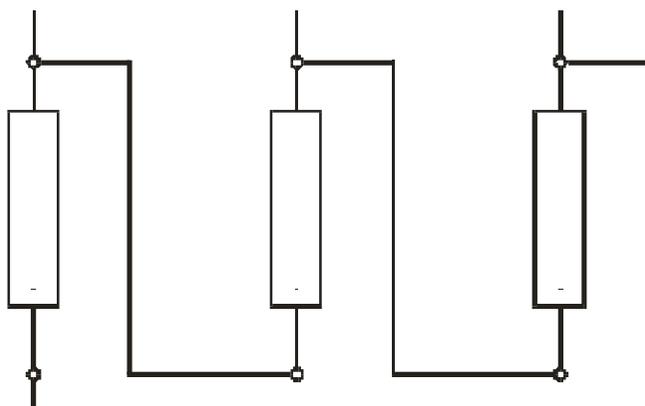
Circuiti trifasi

UTILIZZATORE TRIFASE PASSIVO

Dispositivo a tre morsetti ottenuto da tre utilizzatori monofasi passivi, collegati a stella



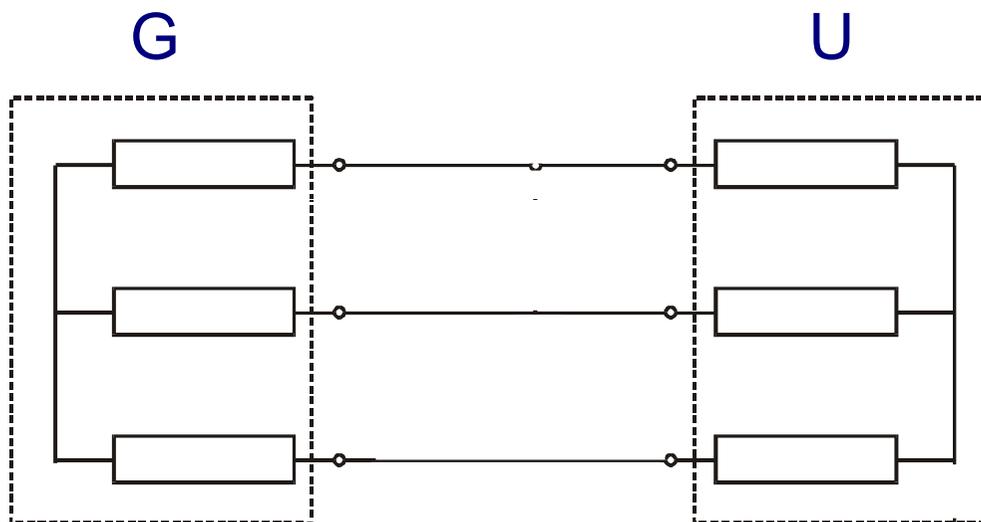
oppure a triangolo





Circuiti trifasi

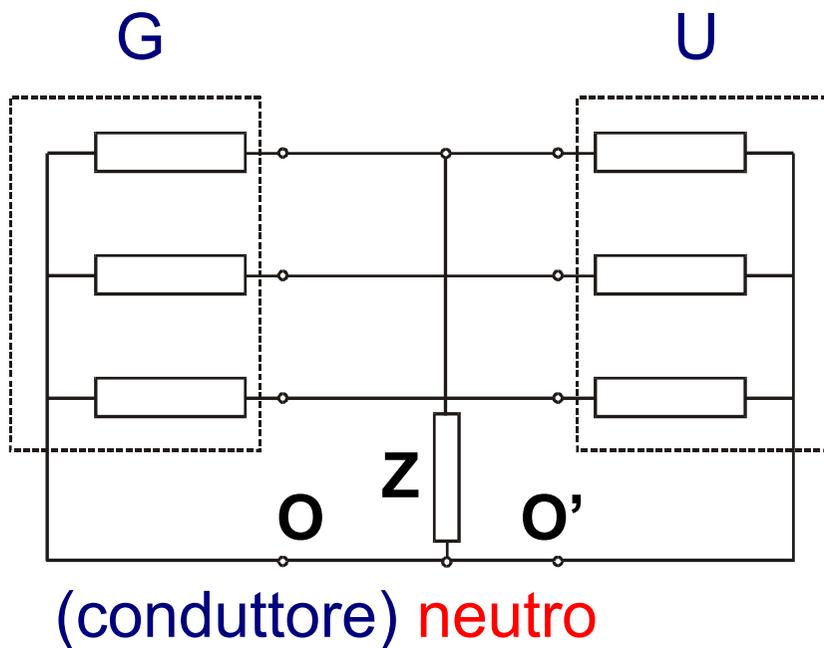
Connettendo dispositivi a tre morsetti mediante linea a tre conduttori si ottiene un **circuito trifase**.





Circuiti trifasi

Si realizzano anche linee, dispositivi, circuiti trifasi a quattro conduttori



Il neutro consente di collegare alla linea trifase carichi monofasi Z

O, O' centri stella



Circuiti trifasi

SISTEMI TRIFASI

Un sistema trifase è costituito da tre grandezze elettriche (tensione o corrente) P.A.S. isofrequenziali

$$a_1(t) \quad a_2(t) \quad a_3(t)$$

tali che

$$a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) = 0$$

Un sistema trifase si dice **simmetrico** (se di tensione) o **equilibrato** (se di corrente) se è costituito da tre generatori P.A.S. di uguale frequenza, uguale valore efficace, uguale sfasamento reciproco ($2/3\pi$)



Circuiti trifasi

SISTEMI TRIFASI

Il sistema è a **senso ciclico diretto** se a_2 è in ritardo su a_1 e così via

Il sistema è a **senso ciclico inverso** se a_2 è in anticipo su a_1 e così via

Rappresentazione analitica nel dominio del tempo

$$a_1(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a_2(t) = A_M \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{2}{3}\pi\right)$$

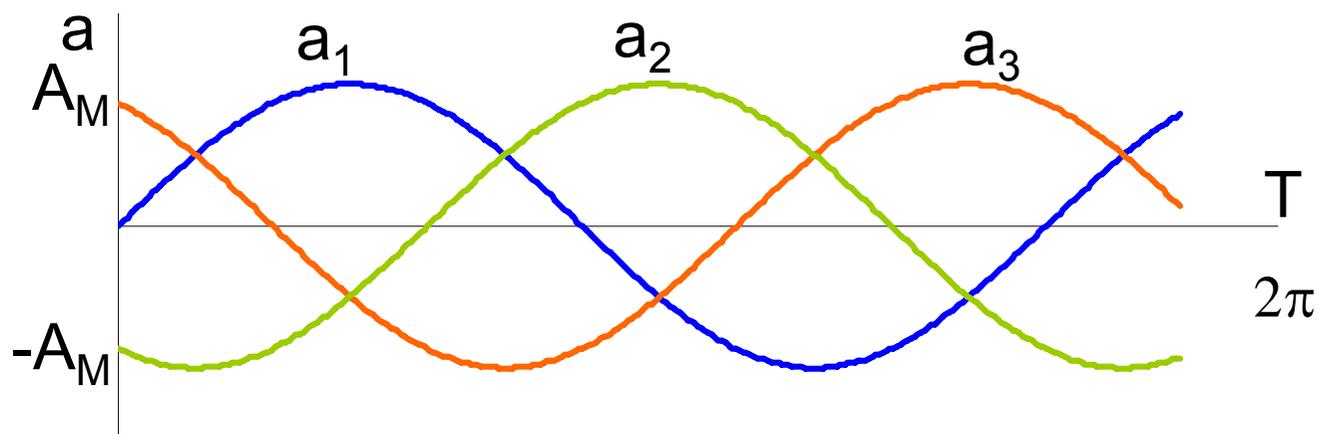
$$a_3(t) = A_M \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{4}{3}\pi\right)$$

Sistema trifase
simmetrico o
equilibrato a senso
ciclico diretto

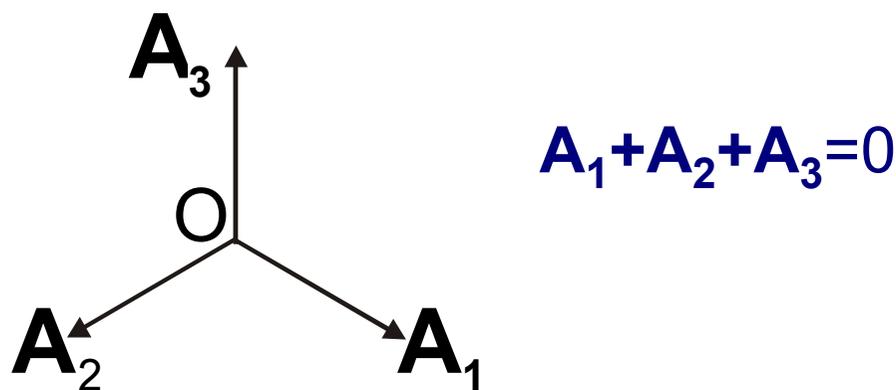


Circuiti trifase

Rappresentazione grafica (dominio del tempo)



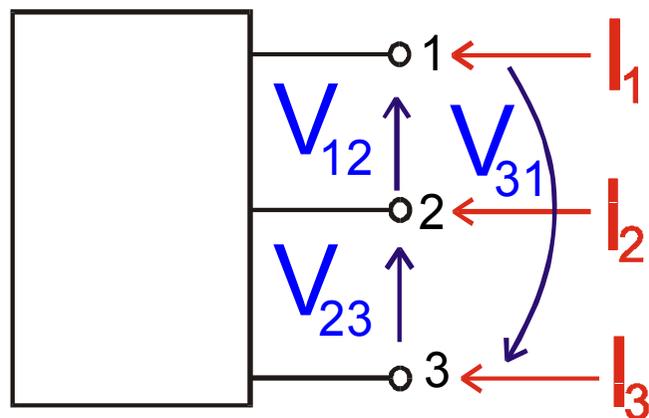
Rappresentazione grafica (dominio dei fasori)





Circuiti trifasi

Si considerino tensioni e correnti di un dispositivo trifase in regime P.A.S.



$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0$$

Tensioni di linea (o concatenate)

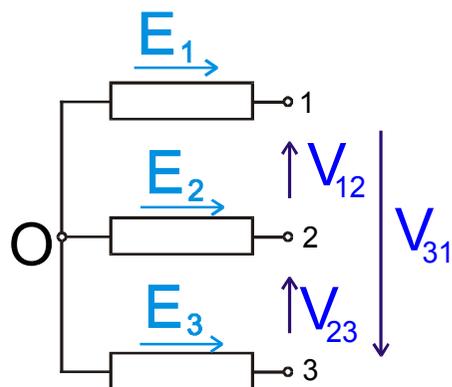
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Correnti di linea



Circuiti trifasi

Se internamente il dispositivo è collegato a stella, possiamo individuare le **tensioni di fase** E_1 , E_2 , E_3

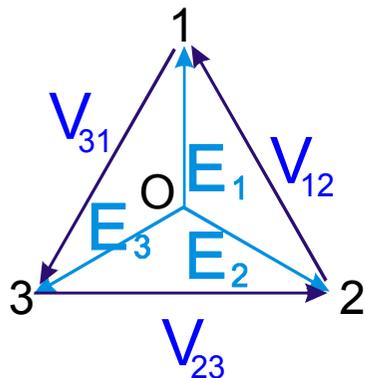


$$V_{12} = E_1 - E_2$$

$$V_{23} = E_2 - E_3$$

$$V_{31} = E_3 - E_1$$

V simmetrico, I equilibrato \longrightarrow E simmetrico ($E_{1M} = E_{2M} = E_{3M}$)
 E si può ricavare da V vettorialmente o analiticamente



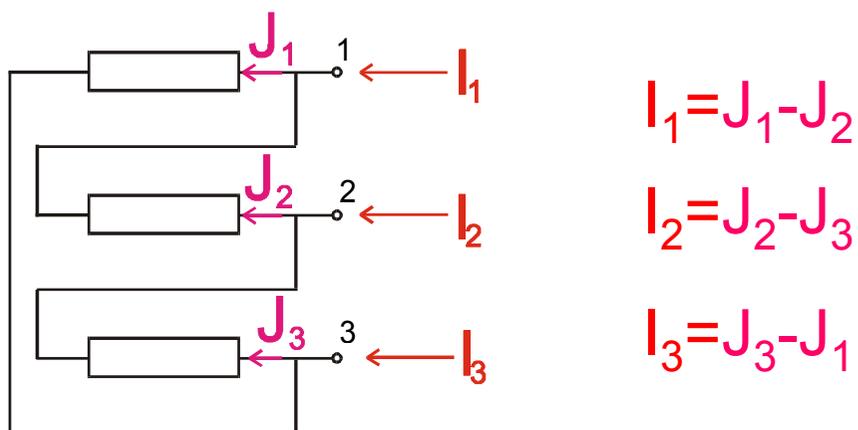
Si trova, per i valori efficaci:

$$V = 2E \cos \frac{\pi}{6} = 2E \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}E$$

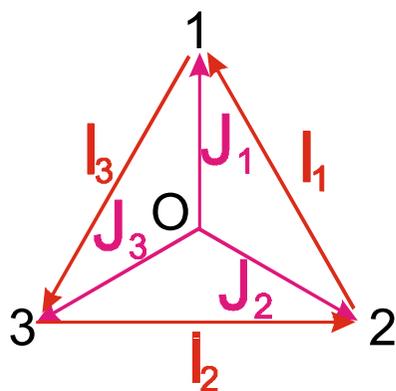


Circuiti trifasi

Se internamente il dispositivo è collegato a triangolo, possiamo individuare le **correnti di fase J_1, J_2, J_3**



I equilibrato, V simmetrico \longrightarrow J equilibrato ($J_{1M} = J_{2M} = J_{3M}$)



Risulta

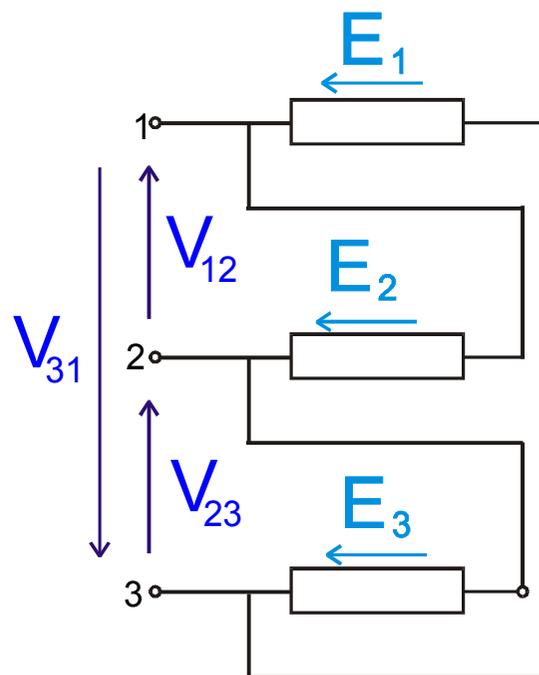
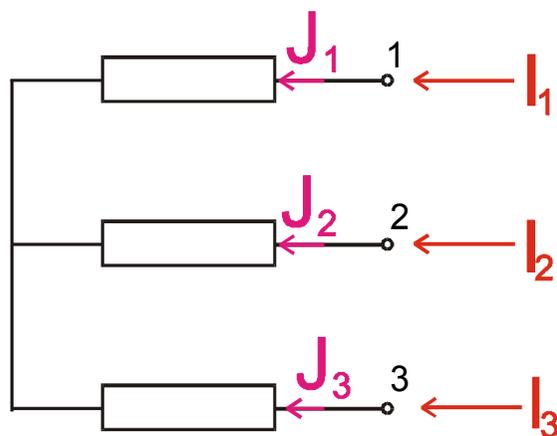
$$I = \sqrt{3}J$$

per i valori efficaci



Circuiti trifasi

- Nel collegamento a stella si possono introdurre correnti di fase $J=I$
- Nel collegamento a triangolo si possono introdurre tensioni di fase $E=V$





Circuiti trifasi

POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE

Siano: (V,E) tensioni di linea e di fase simmetriche

(I,J) correnti di linea e di fase equilibrate

Sia φ l'angolo tra E ed J

Assumendo la convenzione di segno degli utilizzatori, pensando il dispositivo trifase ottenuto da tre dispositivi monofasi, le potenze totali assorbite risultano:

$$P = 3EJ\cos\varphi$$

attiva

$$Q = 3EJ\sin\varphi$$

reattiva

$$A = 3EJ$$

apparente



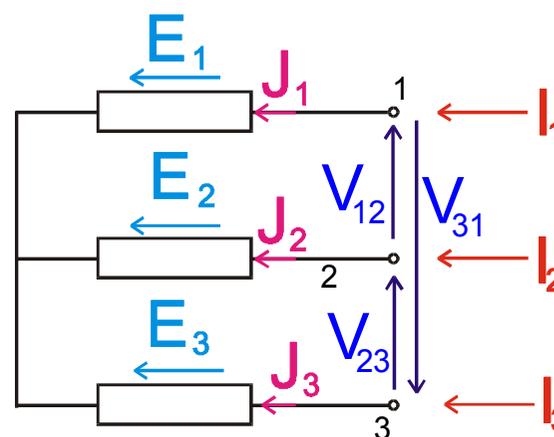
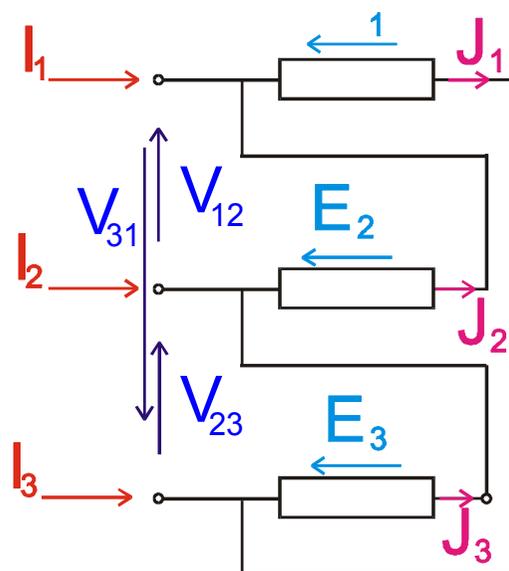
Circuiti trifasi

- Se il dispositivo è collegato a **stella** ($V = \sqrt{3}E$, $I = J$)

$$P = \sqrt{3}\sqrt{3}EJ \cos \varphi = \sqrt{3}VI \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}VI \sin \varphi$$

$$A = \sqrt{3}VI$$



- Se il dispositivo è collegato a **triangolo** ($V = E$, $I = \sqrt{3}J$)

$$P = \sqrt{3}\sqrt{3}EJ \cos \varphi = \sqrt{3}VI \cos \varphi$$

$$Q = \sqrt{3}VI \sin \varphi$$

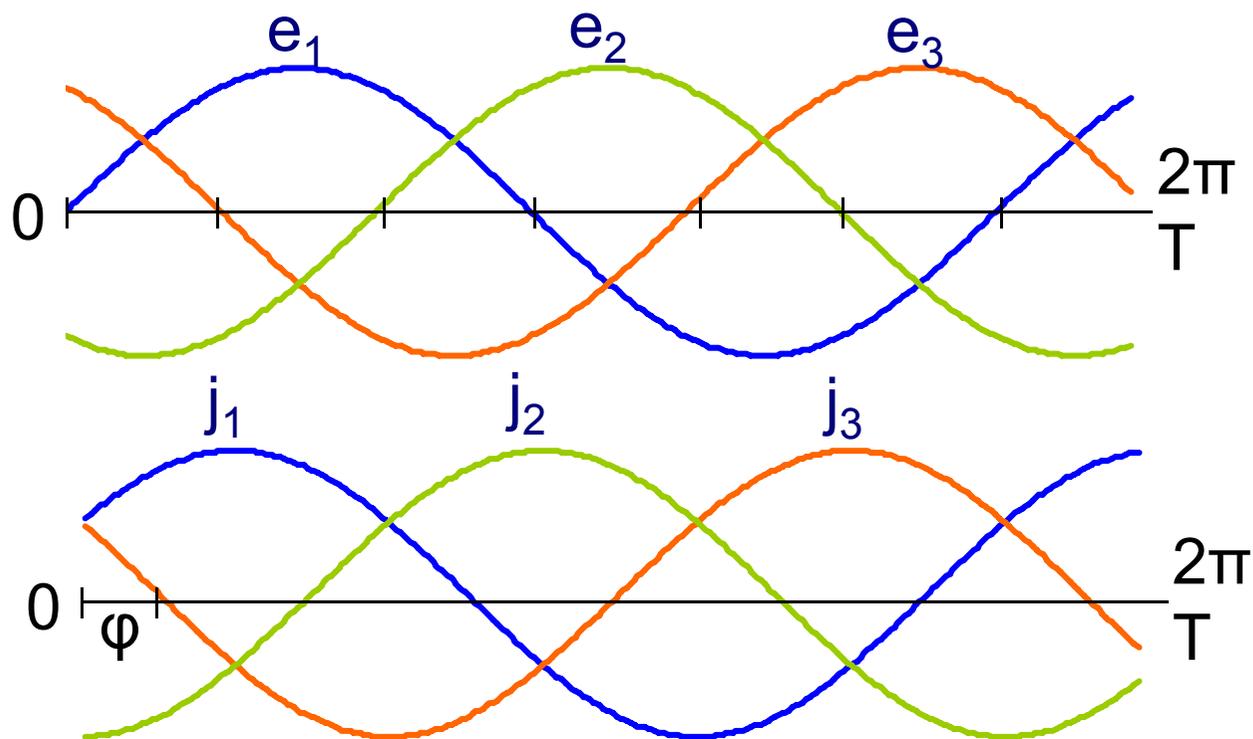
$$A = \sqrt{3}VI$$



Circuiti trifasi

POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE LINEARE

e_1, e_2, e_3 sistema simmetrico periodo T
 j_1, j_2, j_3 sistema equilibrato

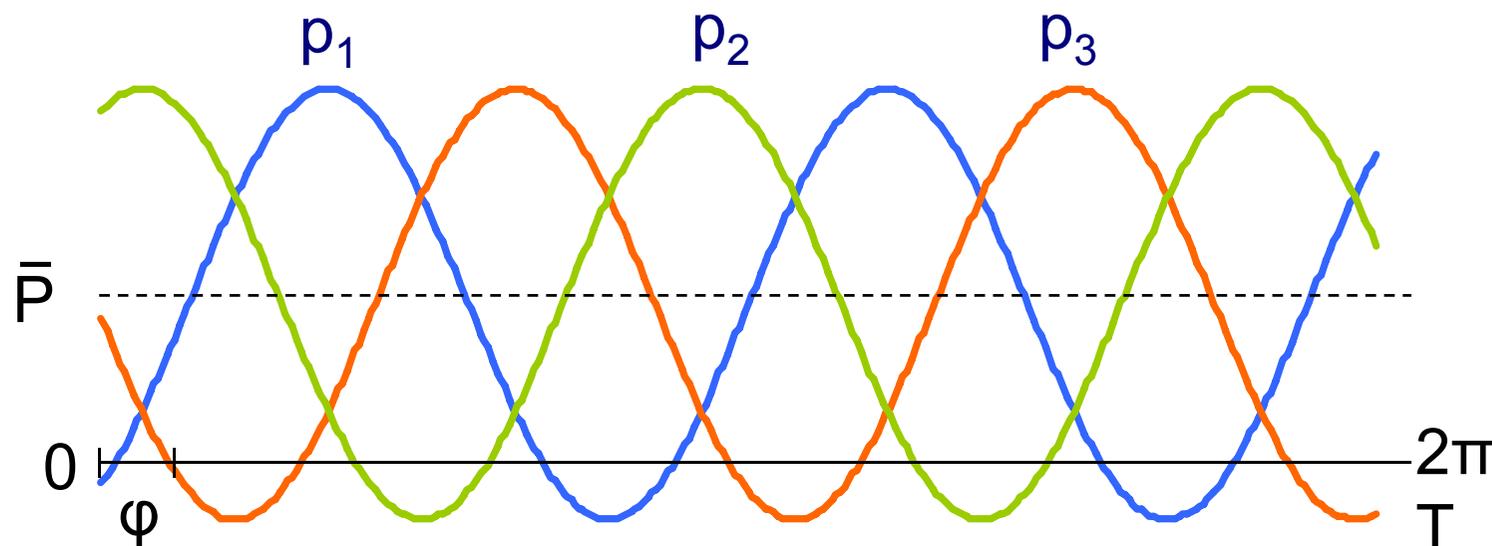




Circuiti trifasi

POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE LINEARE

$$p_1 = e_1 j_1 \quad p_2 = e_2 j_2 \quad p_3 = e_3 j_3 \quad \text{CONVENZIONE UTILIZZATORI}$$



Rispetto al valore medio \bar{P} $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 0$

Rispetto allo zero $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 3P = 3EJ\cos\varphi$

LA POTENZA ISTANTANEA E' COSTANTE NEL TEMPO

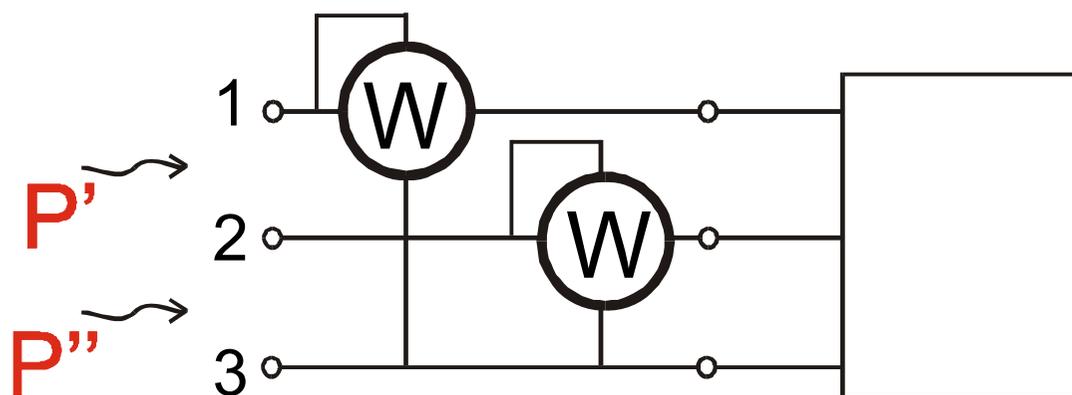


Circuiti trifasi

MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

Si può fare con 2 wattmetri attraversati da correnti di 2 fasi e soggetti alle tensioni delle 2 fasi rispetto alla terza

INSERZIONE ARON





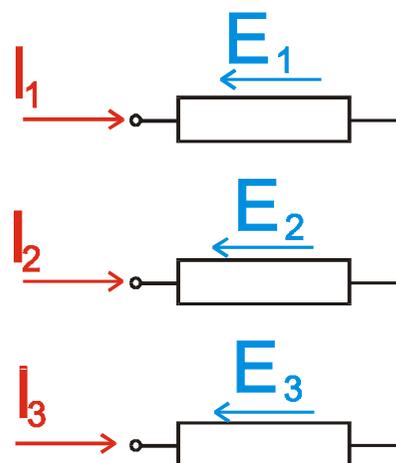
Circuiti trifasi

MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

La somma algebrica delle misure dei due wattmetri:

$$\begin{aligned} P' + P'' &= \operatorname{Re}\{V_{13}I_1^* + V_{23}I_2^*\} = \operatorname{Re}\{(E_1 - E_3)I_1^* + (E_2 - E_3)I_2^*\} = \\ &= \operatorname{Re}\{E_1I_1^* + E_2I_2^* + E_3(-I_1^* - I_2^*)\} = \operatorname{Re}\{E_1I_1^* + E_2I_2^* + E_3I_3^*\} \\ &= P_1 + P_2 + P_3 = P \end{aligned}$$

Collegamento a Y





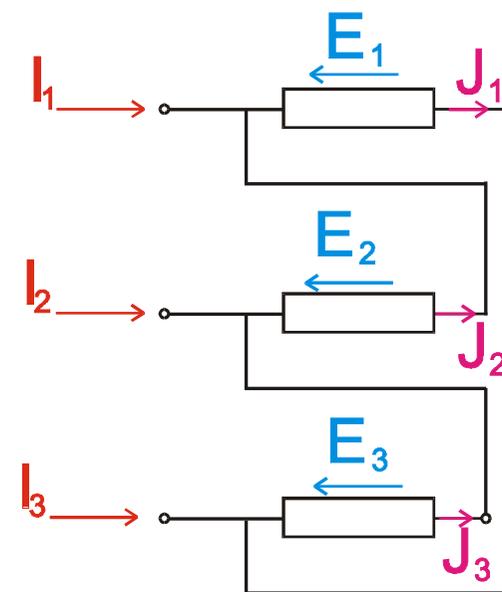
Circuiti trifasi

MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

ovvero

$$\begin{aligned} P' + P'' &= \operatorname{Re}\{V_{13}I_1^* + V_{23}I_2^*\} = \operatorname{Re}\{E_1(J_1 - J_2)^* - E_3(J_2 - J_3)^*\} = \\ &= \operatorname{Re}\{E_1J_1^* + E_3J_3^* + (-E_1 - E_3)J_2^*\} \\ &= \operatorname{Re}\{E_1J_1^* + E_3J_3^* + E_2J_2^*\} = \\ &= P_1 + P_2 + P_3 = P \end{aligned}$$

Collegamento a Δ

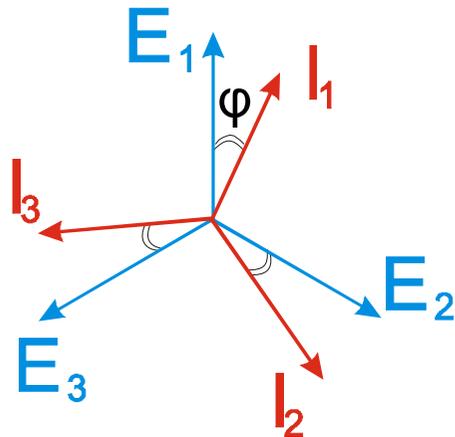




Circuiti trifasi

MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

Se il sistema è simmetrico (V) ed equilibrato (I)



$$\text{fase di } V_{13} = \frac{\pi}{3} \quad \text{fase di } I_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\text{fase di } V_{23} = 0 \quad \text{fase di } I_2 = -\frac{\pi}{6} - \varphi$$

$$P' = \text{Re}\{\mathbf{V}_{13} \mathbf{I}_1^*\} = VI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P'' = \text{Re}\{\mathbf{V}_{23} \mathbf{I}_2^*\} = VI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$



Circuiti trifasi

Se il sistema è simmetrico (V) ed equilibrato (I)

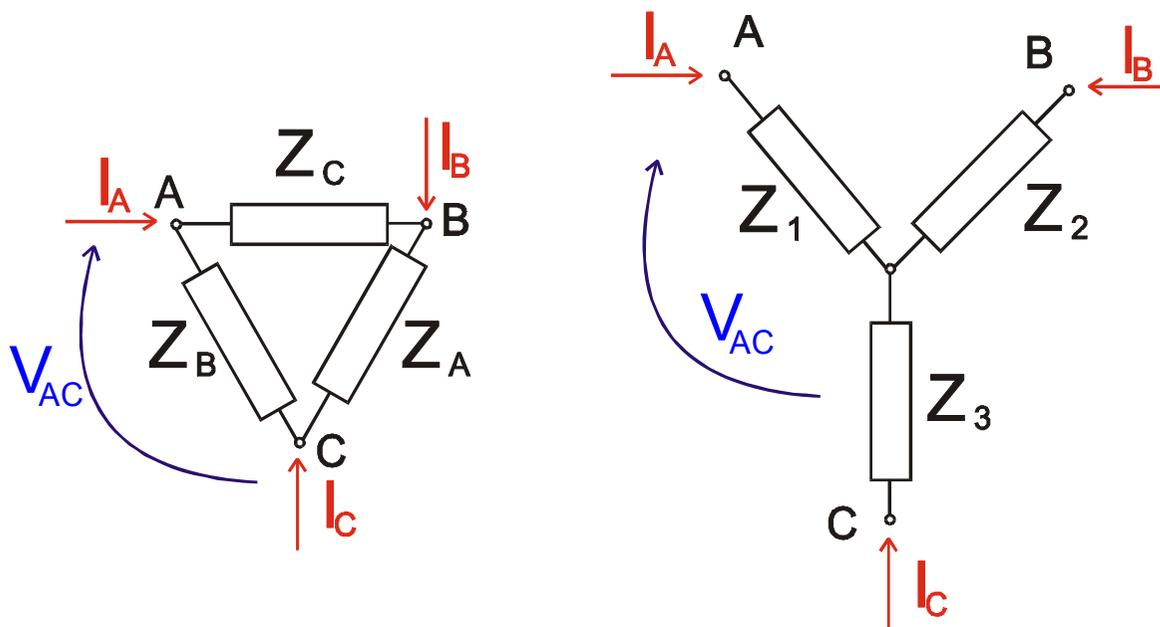
$$\begin{aligned} P' + P'' &= VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) + \\ &+ VI \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) = \\ &= \sqrt{3} VI \cos \varphi = P \quad \varphi = 0 \quad P' = P'' \end{aligned}$$

$$P' - P'' = VI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$
$$\begin{cases} P = P' + P'' \\ Q = \sqrt{3}(P' - P'') \end{cases}$$



Circuiti trifasi

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA



$$I_B \equiv 0 \longrightarrow -I_C = I_A = \frac{V_{AC}}{Z_B(Z_A + Z_C)} \quad \text{triangolo}$$

$$I_A = \frac{V_{AC}}{Z_1 + Z_3} \quad \text{stella}$$

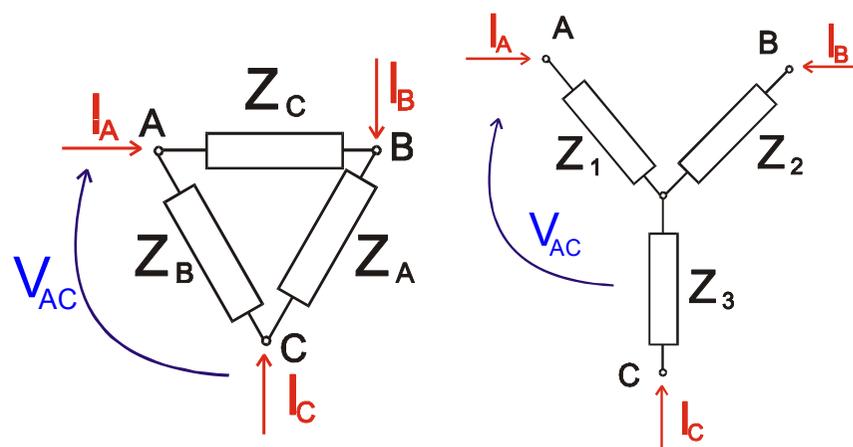


Circuiti trifasi

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA

Per l'uguaglianza delle correnti al nodo A

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$



Imponendo l'uguaglianza delle correnti anche ai nodi B,C

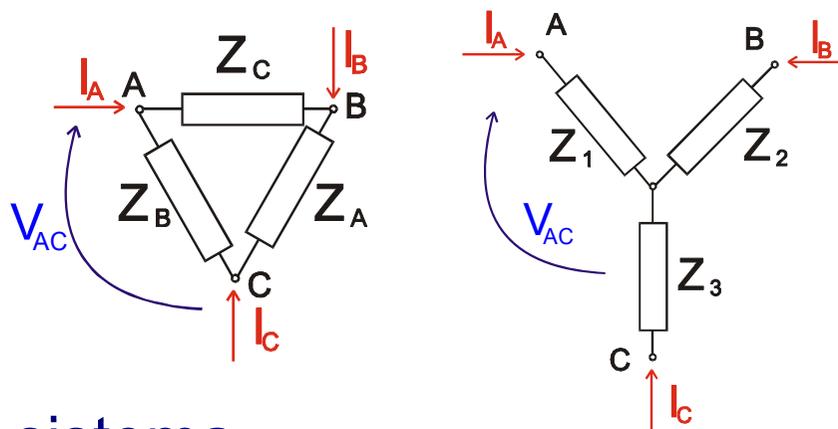
$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$



Circuiti trifasi

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA



Risolvendo il sistema

$$Z_1 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Caso particolare

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z$$

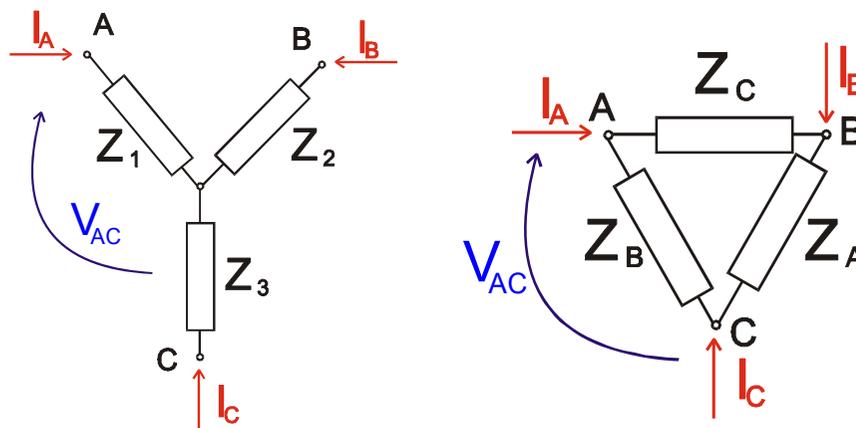
→

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = \frac{1}{3} Z$$



Circuiti trifasi

TRASFORMAZIONE STELLA - TRIANGOLO



Procedendo inversamente, si ottiene la trasformazione stella - triangolo

$$Z_A = Z_2 Z_3 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \quad Z_B = Z_1 Z_3 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)$$

$$Z_C = Z_1 Z_2 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)$$

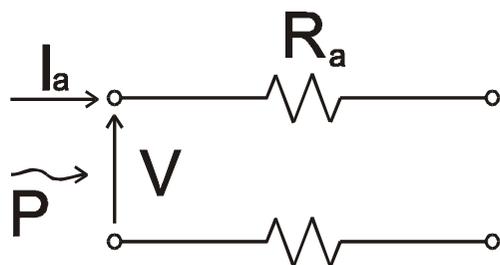


Circuiti trifasi

LINEA MONOFASE – LINEA TRIFASE

Confronto di prestazioni a pari:

- Tensione di linea V
- Lunghezza linea l
- Potenza dissipata P_{da}
- Potenza trasportata P



$$R_a \propto \frac{l}{S_a}$$

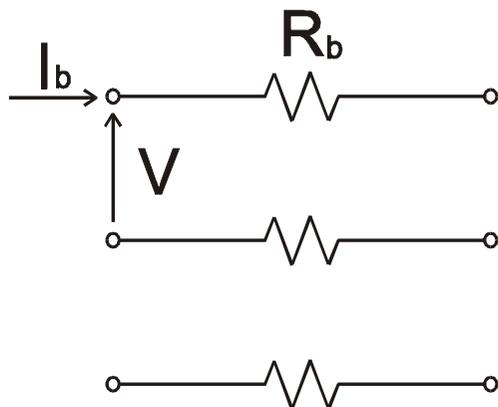
$$P_{da} = 2R_a I_a^2$$

$$P_a = VI_a$$



Circuiti trifasi

LINEA MONOFASE – LINEA TRIFASE



$$R_b \propto \frac{l}{S_b}$$

$$P_{db} = 3R_b I_b^2$$

$$P_b = \sqrt{3}VI_b$$

$$\left. \begin{aligned} 2R_a I_a^2 = 3R_b I_b^2 &\Rightarrow 2 \frac{l}{S_a} I_a^2 = 3 \frac{l}{S_b} I_b^2 \\ VI_a = \sqrt{3}VI_b &\Rightarrow I_b = \frac{I_a}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} S_a = 2S_b$$

**La linea trifase consente un vantaggio economico
a parità di prestazioni**