Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Elettrotecnica

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

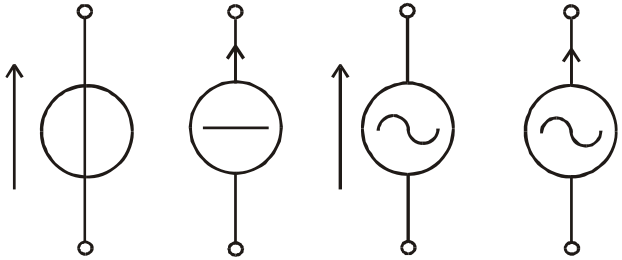
www.unipv.it/electric/cad

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

I CIRCUITI COMPRENDONO:

- **Sorgenti interne di energia**

- **Sorgenti esterne di energia**

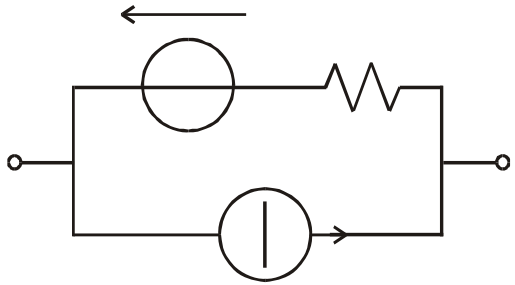


- **Utilizzatori passivi di energia**

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

I CIRCUITI COMPRENDONO:

- **Utilizzatori attivi di energia**

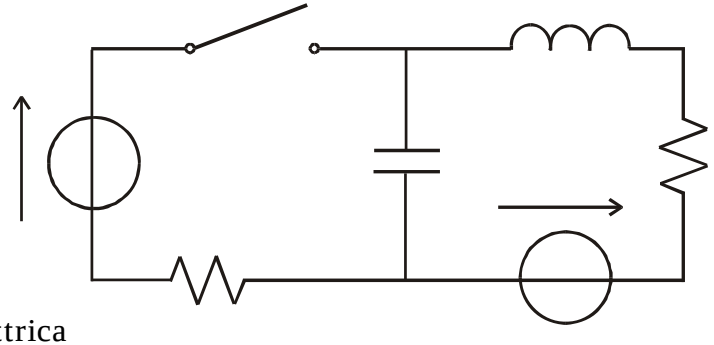


- **Interruttori**

Per connettere o disconnettere lati

funzionamento perturbato

Esempio



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Circuito elettrico lineare:**

  Tutti i lati sono lineari

- **Circuito elettrico a parametri invarianti nel tempo:**

  I parametri caratteristici dei lati non cambiano nel tempo

t = 0 **Manovra dell'interruttore**

- **$t = 0^-$** Istante immediatamente precedente
- **$t = 0^+$** Istante immediatamente successivo

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Grandezze di ingresso:**

  e(t), a(t) impresse dai generatori

- **Grandezze di stato:**

  v_C dei condensatori indipendenti

  i_L degli induttori indipendenti

- **Stato del circuito:**

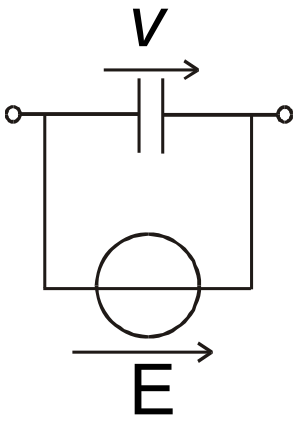
  NOTI v_C, i_L in t = 0 (stato iniziale)
  NOTI *e*, *a* per t ≥ 0
  Allora *v*, *i* sono noti in ogni t >0

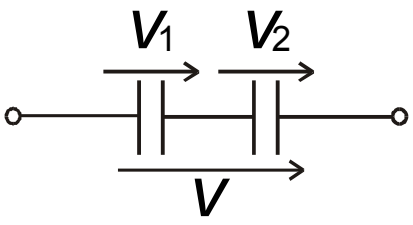
- **Grandezze di uscita:**

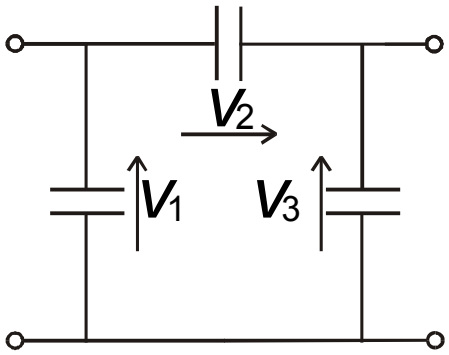
  ***v*, *i* in ogni lato (risposta del circuito)**

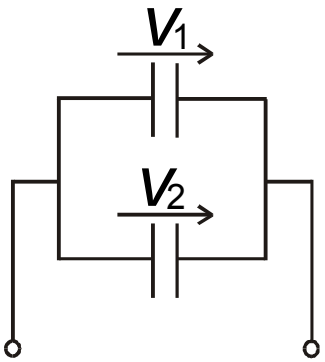
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Non sono indipendenti:**





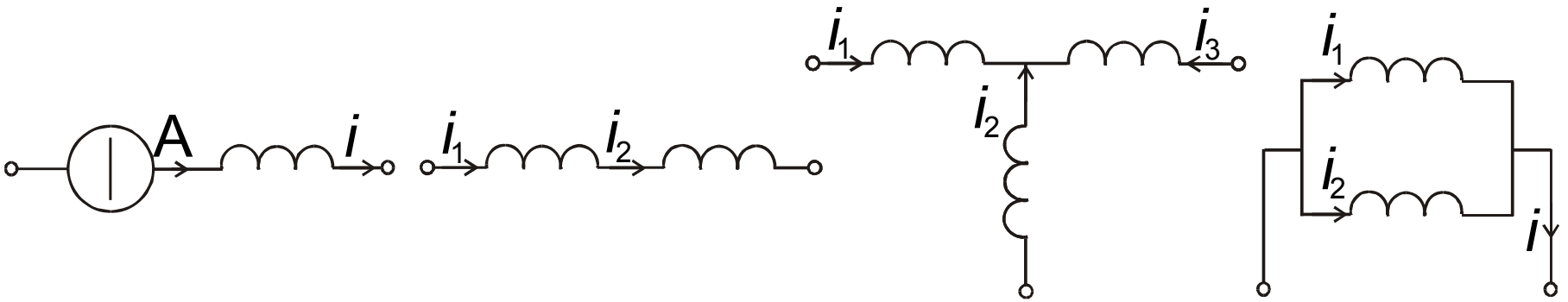




$$v = E \qquad v = v_1 + v_2 \qquad \sum_{i=1}^{3} v_i = 0 \qquad v_1 = v_2$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Non sono indipendenti:**



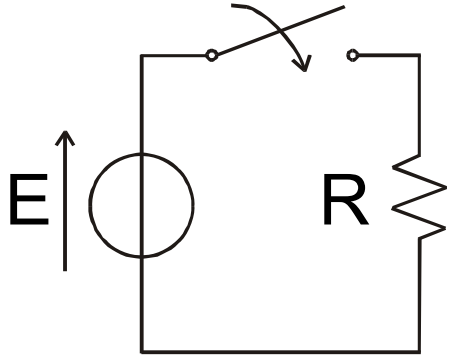
$$i = A \qquad i_1 = i_2 \qquad \sum_{i=1}^{3} i_i = 0 \qquad i = i_1 + i_2$$

I VALORI DELLE VARIABILI DI LATO SONO VINCOLATI DALL'EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

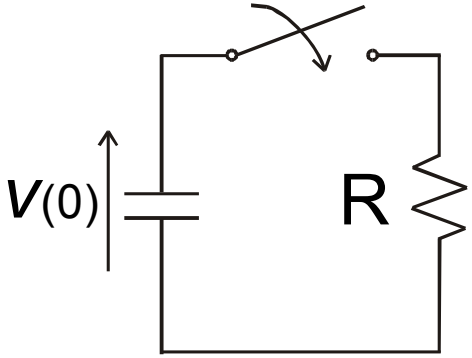
LA RISPOSTA DEL CIRCUITO E' DOVUTA A:

- Sorgenti esterne di **energia infinita**
  (la risposta si mantiene indefinita)
- Sorgenti interne di **energia finita**
  (la risposta si esaurisce)



Prima della manovra t<0
regime iniziale

&



Molto dopo la manovra t →∞
regime finale

LA RISPOSTA E' DOVUTA A SORGENTI ESTERNE

LA RISPOSTA DEL CIRCUITO E' DOVUTA A:

- Nell'intervallo di tempo intermedio:

TRANSITORIO

LA RISPOSTA E' DOVUTA A SORGENTI ESTERNE
+
SORGENTI INTERNE

Dati iniziali: valori delle grandezze a $t = 0^-$
Valori iniziali: valori delle grandezze a $t = 0^+$

Analisi del circuito nel funzionamento transitorio

- Avvenuta la manovra dell'interruttore (apertura, chiusura) a t = 0
- Noti:
  - i parametri del circuito A, E, R, L, C, M
  - lo stato iniziale

RICAVARE LA RISPOSTA DEL CIRCUITO

$$x(t) \quad , \quad 0 < t < \infty$$

Analisi del circuito nel funzionamento transitorio

- Metodo matematico classico

$$X = X_r + X_t$$

ingresso

Ingresso e stato

r: regime
t: transitorio

- Metodo fisico moderno

$$X = X_{i=0} + X_{s=0}$$

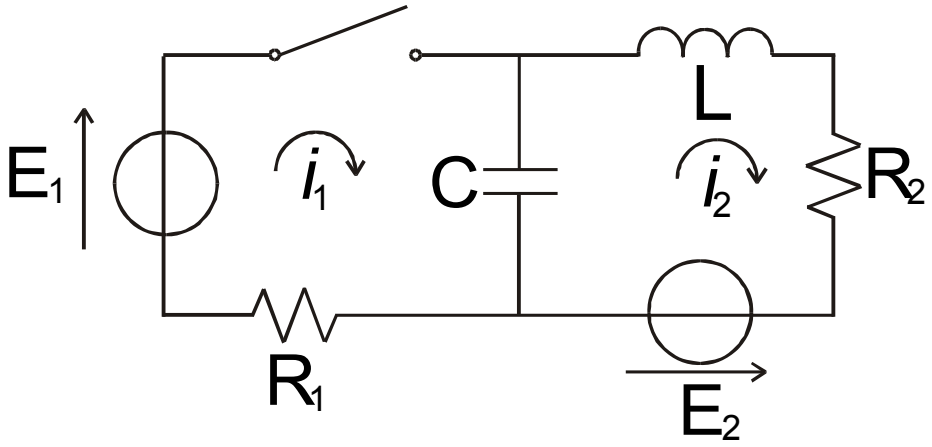
i: ingresso
s: stato

solo sorgenti interne → transitorio

solo sorgenti esterne → transitorio e regime

Metodo classico

- Vale per i circuiti lineari a parametri invarianti nel tempo
- Non è un metodo automatico



t = 0 chiusura

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Scegliere il metodo di analisi
- Individuare le incognite
- Scrivere le equazioni integro – differenziali ponendo:

$$\frac{d}{dt} \equiv D \qquad \int_0^t \cdot dt' \equiv D^{-1}$$

a manovra avvenuta $t>0^+$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Maglia 1

  KVL $$E_1 - C^{-1}\int_{-\infty}^{t}(i_1 - i_2)dt' - R_1 i_1 = 0$$

- Maglia 2

  KVL $$C^{-1}\int_{-\infty}^{t}(i_2 - i_1)dt' + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + E_2 = 0$$

poiché $$\int_{-\infty}^{t}\cdot\, dt' = \int_{-\infty}^{0}\cdot\, dt' + \int_{0}^{t} dt' = K + D^{-1}$$

si ha

$$E_1 - v_C(0) - C^{-1}D^{-1}(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0 \qquad (1)$$

$$-v_c(0) + C^{-1}D^{-1}(i_2 - i_1) + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 = 0 \qquad (2)$$

Le due equazioni integro-differenziali sono il sistema risolvente

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Dalla (1) si ricava

$$i_1 = \frac{E_1 - v_C(0) + C^{-1}D^{-1}i_2}{R_1 + C^{-1}D^{-1}}$$

Sostituendo nella (2)

$$-v_C(0) - C^{-1}D^{-1}i_2 + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 +$$

$$-C^{-1}D^{-1}\frac{E_1 - v_C(0) + C^{-1}D^{-1}i_2}{R_1 + C^{-1}D^{-1}} = 0$$

Si ha un'equazione integro-differenziale in i_2

$$-R_1 v_c(0) - \cancel{C^{-1}D^{-1}v_c(0)} + R_2 C^{-1}D^{-1}i_2 + \cancel{\frac{1}{C^2}D^{-2}i_2} + LR_1 Di_2 + LC^{-1}i_2 + R_1 R_2 i_2 +$$

$$+R_2 CD^{-1}i_2 + E_2 R_1 + C^{-1}D^{-1}E_2 - C^{-1}D^{-1}E_1 + \cancel{C^{-1}D^{-1}v_c(0)} - \cancel{\frac{1}{C^2}D^{-2}i_2} = 0$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Derivando ambo i membri una volta, si ottiene

$$\frac{R_1}{C}i_2 + LR_1D^2i_2 + \frac{L}{C}i_2 + R_1R_2Di_2 + \frac{R_2}{C}i_2 + \frac{1}{C}E_2 - \frac{1}{C}E_1 = 0$$

$$D^2i_2 + Di_2\left(\frac{1}{R_1C} + \frac{R_2}{L}\right) + i_2\left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{LR_1C}\right) = \frac{1}{LR_1C}\left(E_1 - E_2\right)$$

+ condizioni iniziali

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Algebra dell'operatore D :

$DD=D^2$ $DD^{-1}=D^{-1}D=1$ D cost=0

- Ricavare un'equazione differenziale lineare in una delle due incognite, nella generica variabile x, di ordine *n*, a coefficienti costanti, in generale non omogenea

$$A_nD^nx+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_0X=f(t) \quad , \quad A_i>0 \quad i=0,n$$

f(t) in generale dipende dalle grandezze di ingresso e dalle sue derivate

Ordine minimo n = numero di bipoli conservativi indipendenti presenti nel circuito

La soluzione matematica:

$$X = X_{OM} + X_{PART}$$

X_{OM}: integrale generale equazione omogenea
X_{PART}: integrale particolare equazione non omogenea

$$X_{OM} = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{\alpha_r t}$$

C_r costanti da determinare

α_r radici (distinte) dell'equazione caratteristica

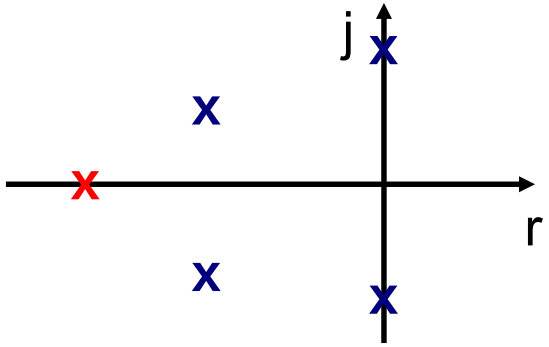
$$A_n \alpha^n + ... + A_0 = 0$$

$$[\tau_r] = -\frac{1}{\alpha_r}$$

costanti di tempo caratteristiche

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Si verifica che α_r è:
  - Reale negativa
  - Complessa coniugata con parte reale ≤ 0



Di conseguenza $\lim_{t\to\infty} X_{OM}=0$

Ovvero $X_{OM}=X_t \rightarrow$ transitorio

X_{PART} è:
- un integrale particolare dell'equazione non omogenea
- certamente la risposta a regime

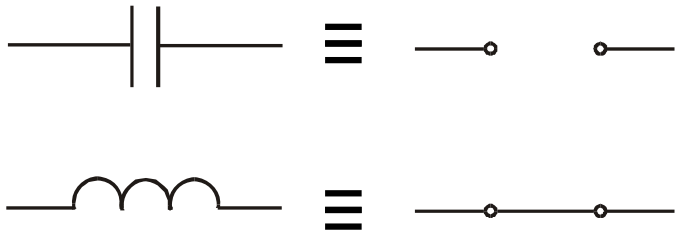
$X_{PART}=X_r \rightarrow$ regime finale

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

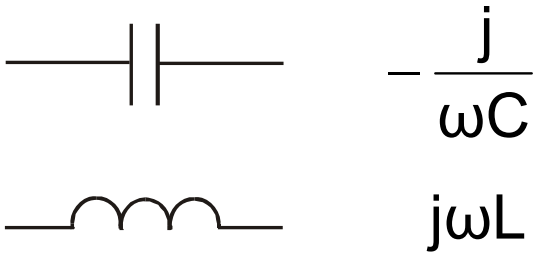
- Fisicamente

  Si trova X_{PART} risolvendo il circuito a regime

Stazionario



P.A.S.



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Determinare i valori iniziali

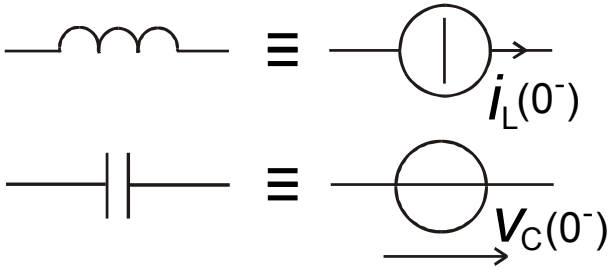
Noti i dati iniziali di grandezze di stato e di ingresso sono noti tutti i dati iniziali.
I valori iniziali di grandezze di stato sono uguali ai dati iniziali:

$i_L(0^-)=i_L(0^+)$

$v_C(0^-)=v_C(0^+)$

Per continuità delle variabili di stato

Tutti i valori iniziali si ricavano fisicamente dal circuito:



Per il teorema di sostituzione

I valori iniziali DX_{0^+}, ….$D^{n-1}X_{0^+}$ si ricavano matematicamente dal sistema di equazioni in 0^+

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Determinare C_r in X_{OM}

Le *n* costanti C_r si ottengono imponendo le *n* condizioni iniziali su:

$$X, Dx, \ldots, D^{n-1}X$$

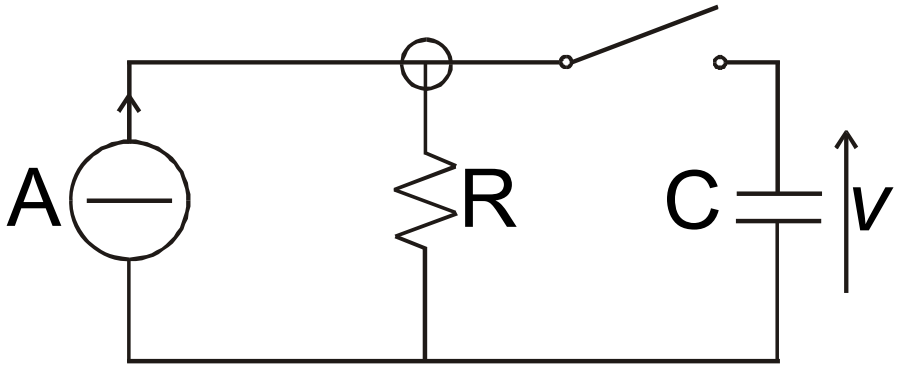
Allora

$$X = X_{OM} + X_{PART}$$

Circuiti del primo ordine in regime perturbato

- Un solo bipolo conservativo (indipendente)
- Un circuito lineare a parametri tempo invarianti con generatori di grandezze costanti nel tempo

Esempio



Dati: A,R,C

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-)=V_0$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

1. METODO CLASSICO

Variabile: *v*

KCL o $CDv + \frac{1}{R} v = A$

Soluzione $v = v_{OM} + v_{PART}$

$v_{OM} \longrightarrow Dv + \frac{v}{RC} = 0$

$\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \longrightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$ Frequenza caratteristica

$\tau = -\frac{1}{\alpha} = RC$ Costante di tempo

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$v_{OM} = Ke^{-t/RC}$

v_{PART} Dal punto di vista fisico corrisponde al regime finale (nel caso stazionario, condensatore = circuito aperto e induttore = corto circuito)

$v_{PART} = RA$

Allora $v_{OM} = Ke^{-t/RC} + RA$

Condizioni iniziali $v(0^-)=V_0$ Dato iniziale

per continuità $v(0^+)=V_0$ Valore iniziale

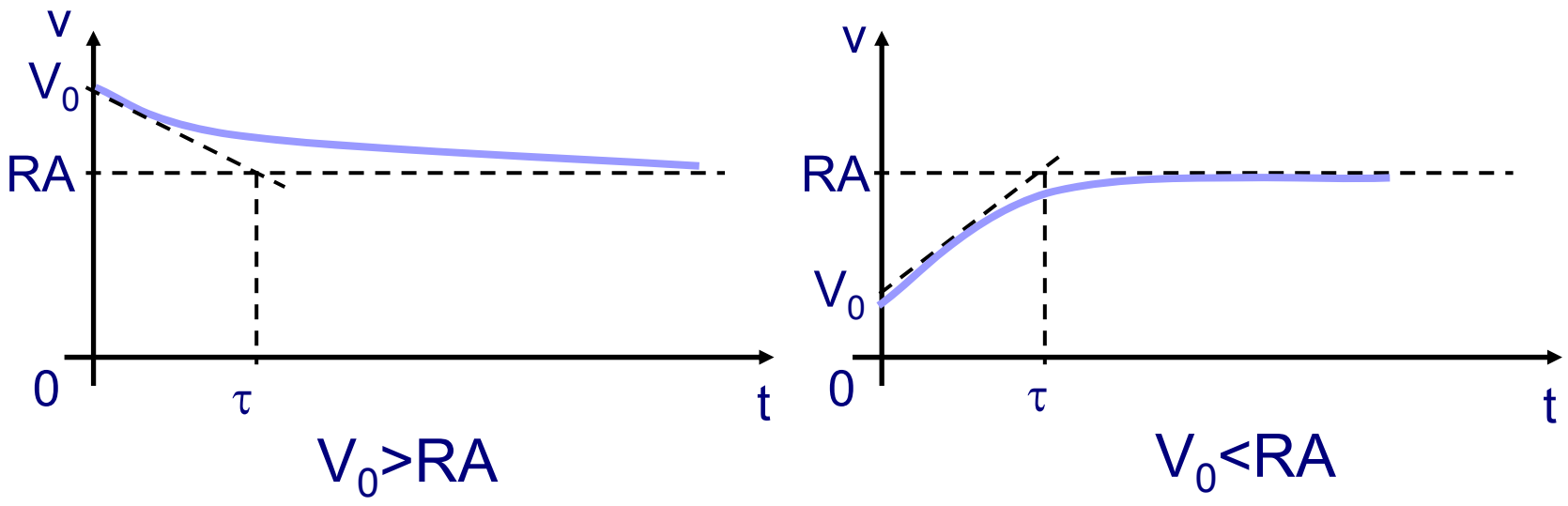
$V_0 = K + RA \longrightarrow K = V_0 - RA$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

La risposta risulta

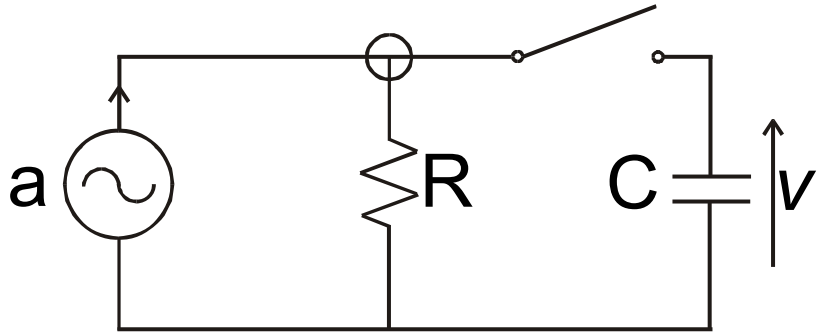
$$v = \underbrace{(V_0 - RA)e^{-t/RC}}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{RA}_{\text{Regime}}$$

Graficamente



Circuiti lineari a parametri tempo invarianti con generatori di grandezze P.A.S.

Esempio



Dati: R,C, $a(t)=A\cos\omega t$

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-)=V_0$

Risoluzione con metodo classico

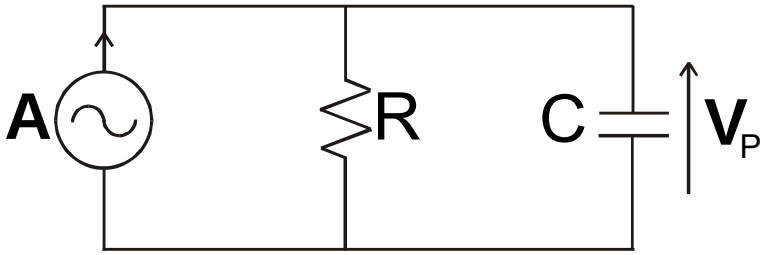
Variabile *v*

KCL o $CDv+\frac{1}{R_1}v = a$

Soluzione $v=v_{OM}+v_{PART}$ $v_{OM}=Ke^{-t/RC}$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

V_{PART} corrisponde al regime finale



$$A = \frac{A}{\sqrt{2}} \angle 0$$

$$\mathbf{V_P = V_{PART} = ZA} \qquad \mathbf{Y} = 1/R + j\omega C \qquad \mathbf{Y = 1/Z}$$

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} \angle \vartheta \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} \angle -\vartheta$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}(\omega RC)$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$$V_{PART}(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} \cos(\omega t - \vartheta) = V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

$$v = Ke^{-t/RC} + V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

Condizione iniziale

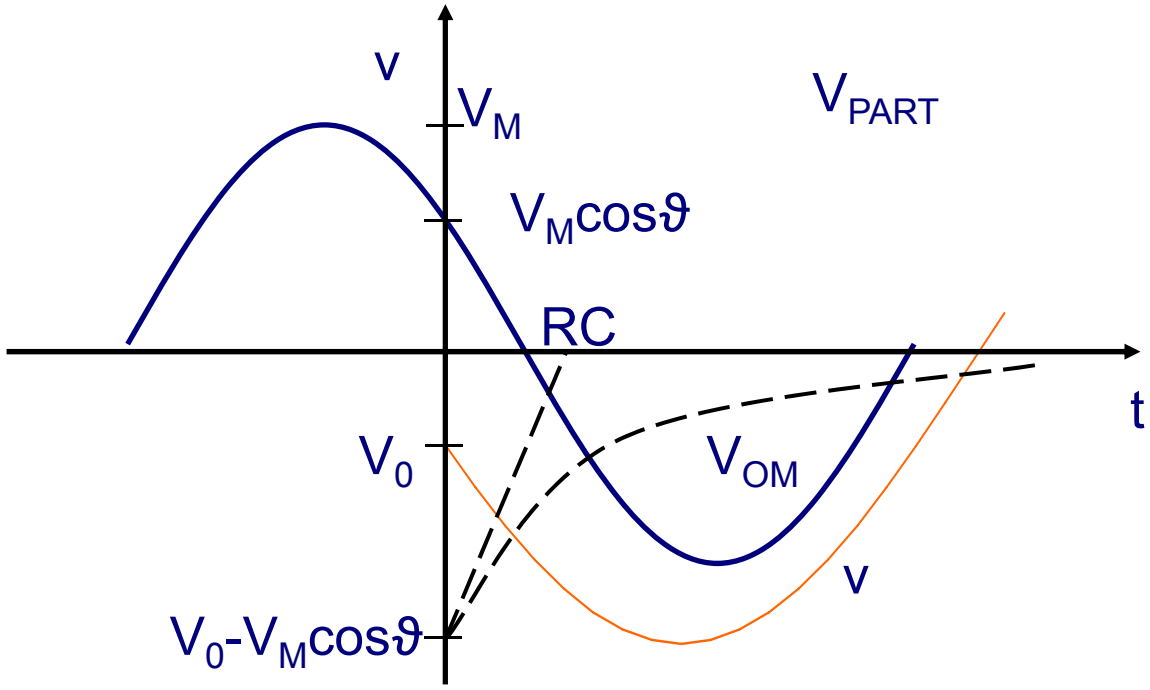
$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

$$V_0 = K + V_M \cos\vartheta \qquad K = V_0 - V_M \cos\vartheta$$

Risposta completa

$$v(t) = (V_0 - V_M \cos\vartheta)e^{-t/RC} + V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato



Se $V_0-V_M\cos\vartheta=0$ → $V_{OM}=0$

→ Regime a t=0

A pari V_0, v_{OM} è massima per $\vartheta=0$

→ Se $RC >> \frac{2\pi}{\omega}$ Allora $v_{MAX} \approx |V_0 - 2V_M|$