



Università degli Studi di Pavia  
Facoltà di Ingegneria

# Corso di Elettrotecnica

## Doppi bipoli



## Doppio bipolo

### ■ Che cos'è?

E' un dispositivo con due porte di scambio della potenza elettrica

(Porta = coppia di morsetti attraversati da corrente uguale ed opposta)



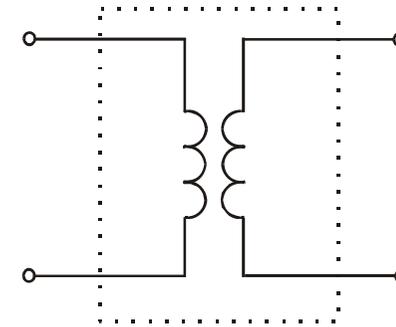
Porta di ingresso 1-1'      Porta di uscita 2-2'



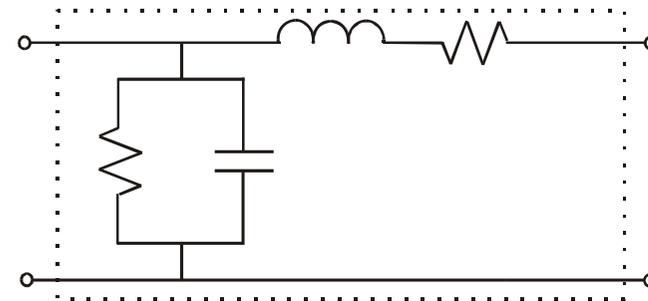
# Doppio bipolo

## ■ Esempi

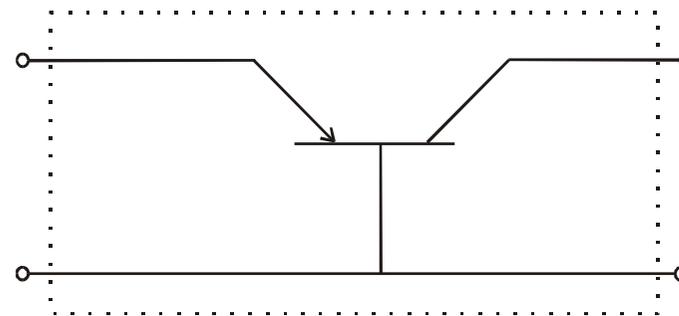
Mutuo induttore  
Trasformatore



Linea elettrica



Transistore





# Doppio bipolo

## ■ Descrizione

Regime di funzionamento:

- Stazionario
- P.A.S.
- Variabile

Caratteristica del D.B.:

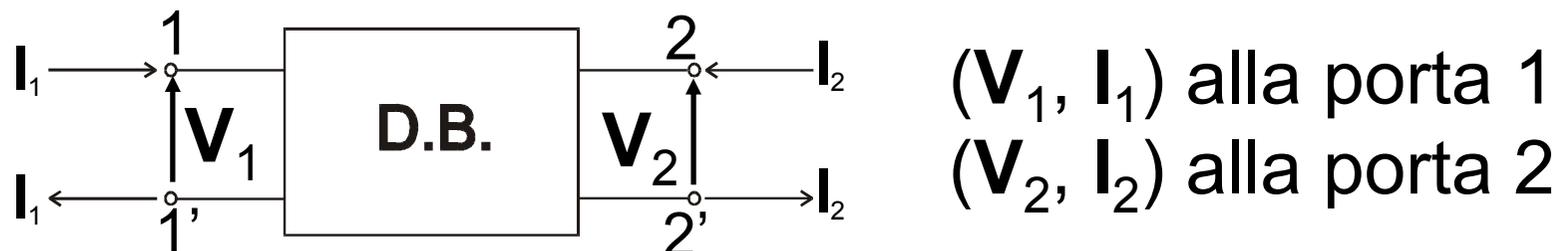
- Attivo, passivo
- Lineare, non lineare





# Doppio bipolo

## D.B. lineare e passivo in regime P.A.S.



Il D.B. impone due relazioni fra le quattro variabili

Variabili indipendenti

**2**

Casi possibili

**6**

1.  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$
2.  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$
3.  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{V}_2)$
4.  $(\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2)$
- ~~5.  $(\mathbf{I}_2, \mathbf{V}_1)$~~
- ~~6.  $(\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1)$~~

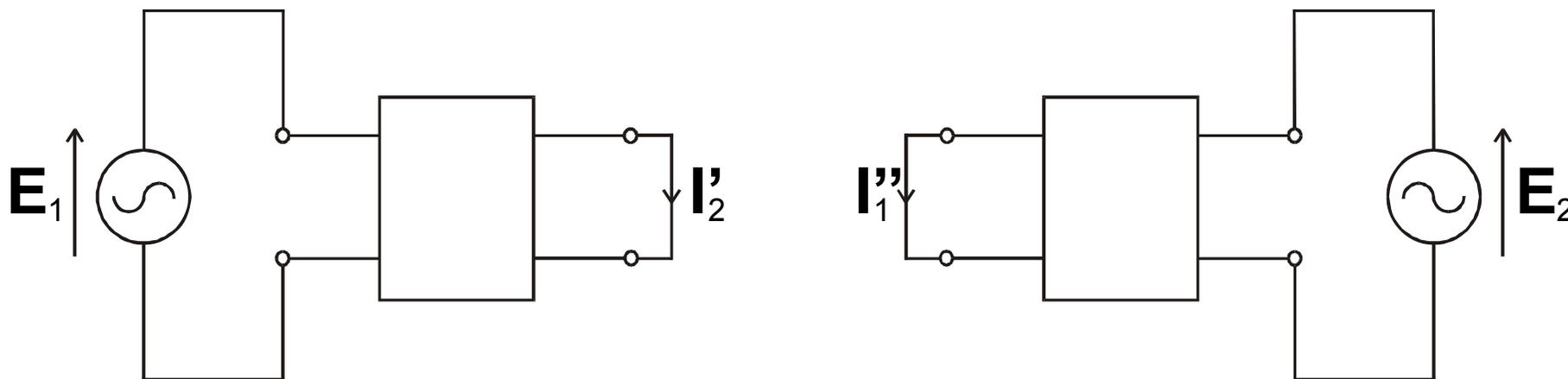
Duale di 3

Duale di 4

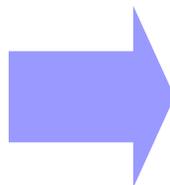


## Doppio bipolo

Un doppio bipolo lineare e passivo (R,L,M,C) è reciproco se avviene che (1):



$$E_1 = E_2$$

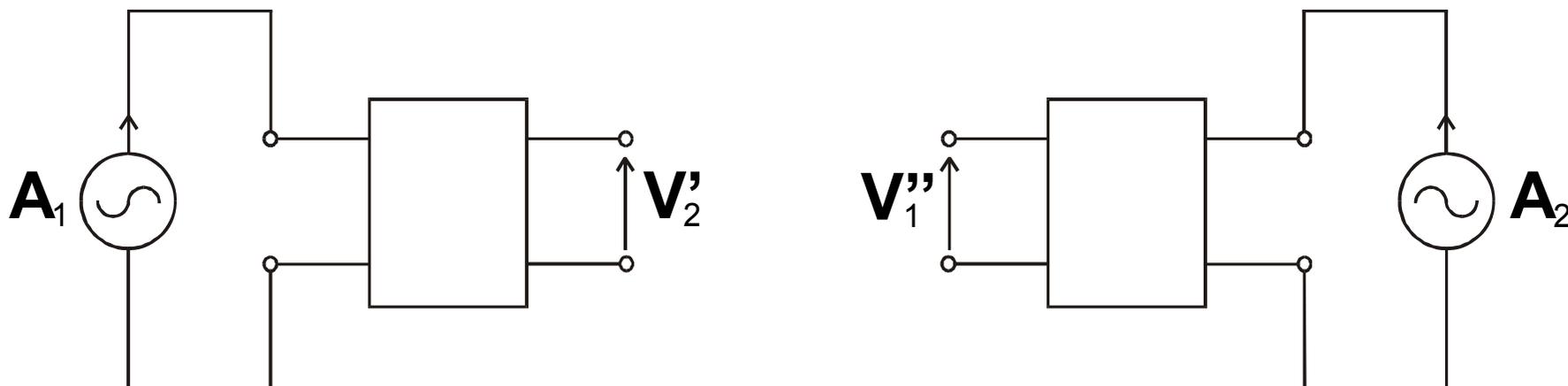


$$I_2' = I_1'' \quad , \quad E_1 / I_2' = E_2 / I_1''$$



## Doppio bipolo

Un doppio bipolo lineare e passivo (R,L,M,C) è reciproco se avviene che (2):

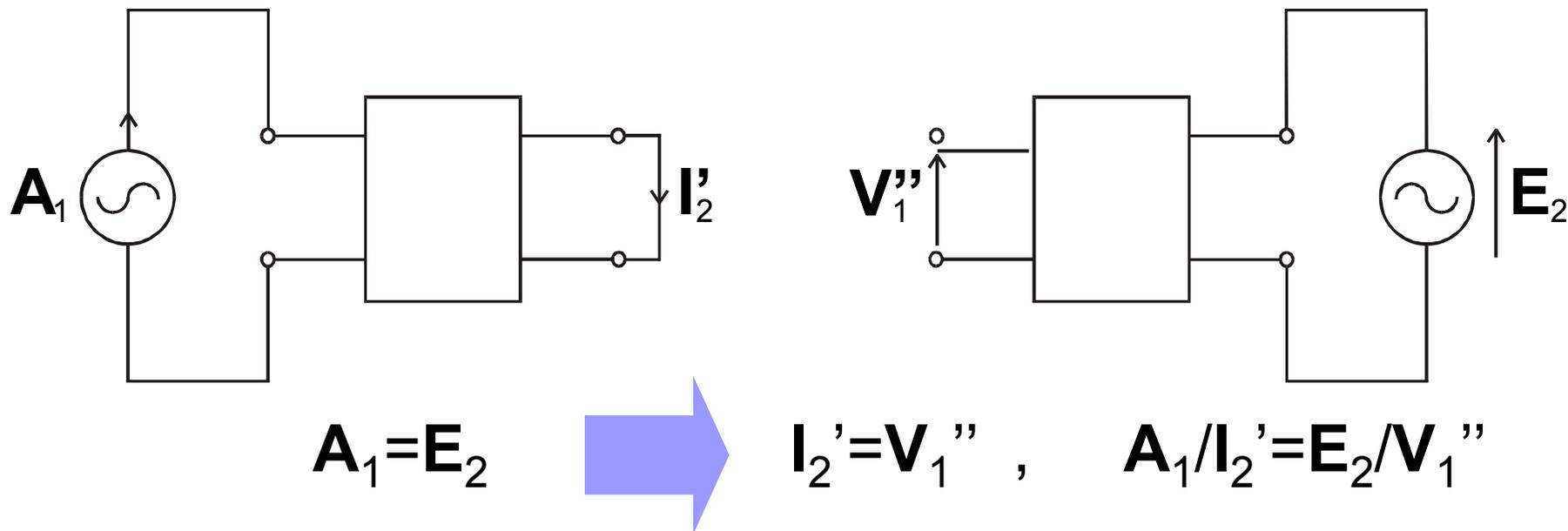


$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_2' = \mathbf{V}_1'' \quad , \quad \mathbf{A}_1 / \mathbf{V}_2' = \mathbf{A}_2 / \mathbf{V}_1''$$



## Doppio bipolo

Un doppio bipolo lineare e passivo (R,L,M,C) è reciproco se avviene che (3):

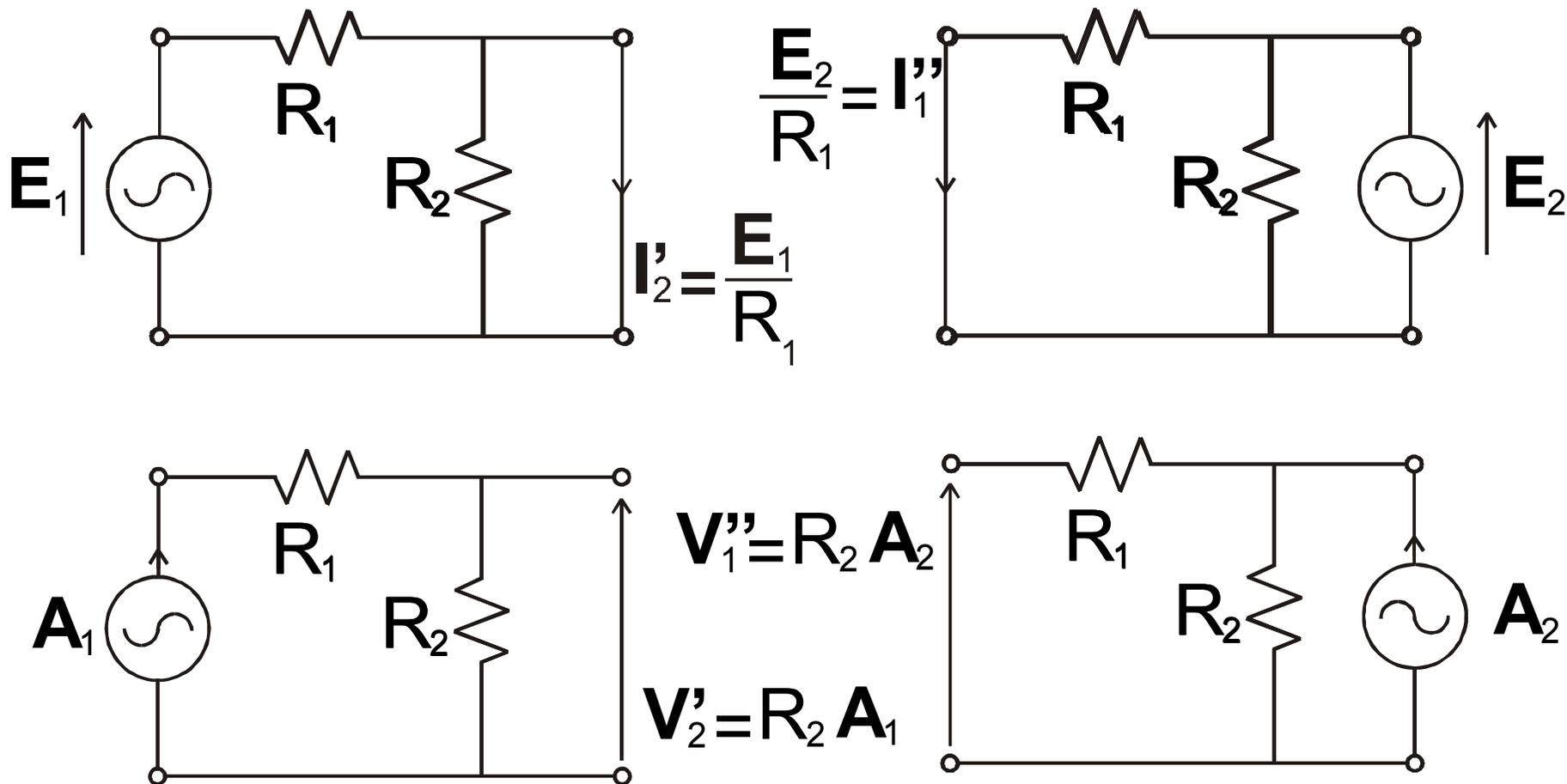


**Scambiando ingresso e uscita il comportamento del D.B. non cambia**



# Doppio bipolo

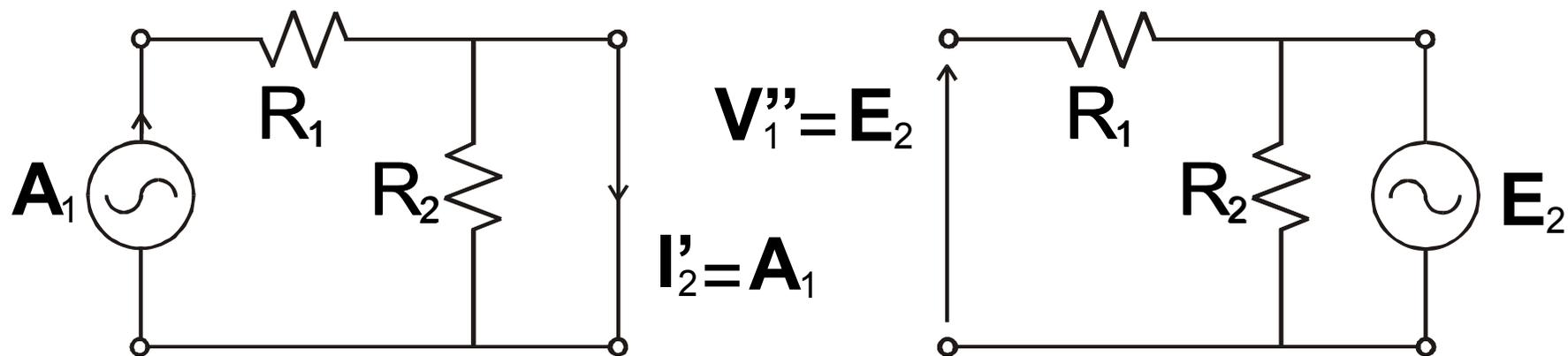
## ■ Esempio (1)





# Doppio bipolo

## ■ Esempio (2)



**Le tre proprietà sono verificate**



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri Z

Le variabili indipendenti sono:  $I_1, I_2$

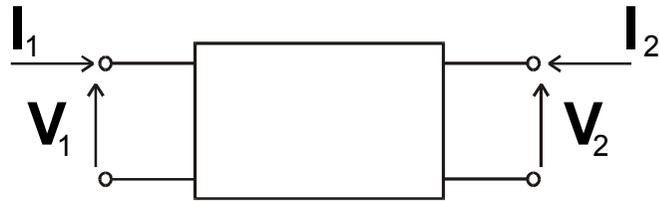


$$\begin{aligned}V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2\end{aligned}$$



# Doppio bipolo

## ■ Descrizione del D.B. con parametri Z



$$\begin{aligned}V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2\end{aligned}$$

$$Z_{11} = \left( \frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0}$$

Impedenza propria alla porta 1 con 2 aperta

$$Z_{22} = \left( \frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0}$$

Impedenza propria alla porta 2 con 1 aperta

$$Z_{12} = \left( \frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0}$$

Impedenza di trasferimento fra 1 e 2

$$Z_{21} = \left( \frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0}$$

Impedenza di trasferimento fra 2 e 1

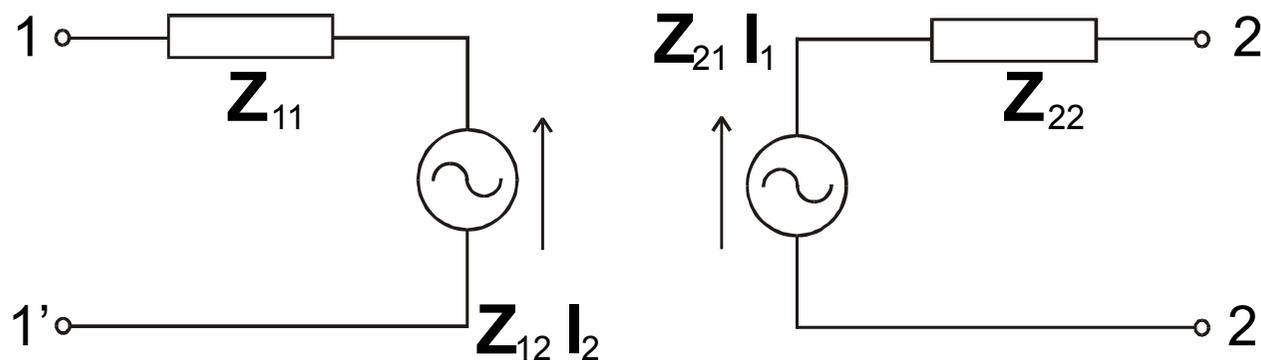
**Si nota che tutti i parametri Z sono definiti a vuoto**



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri Z

Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:

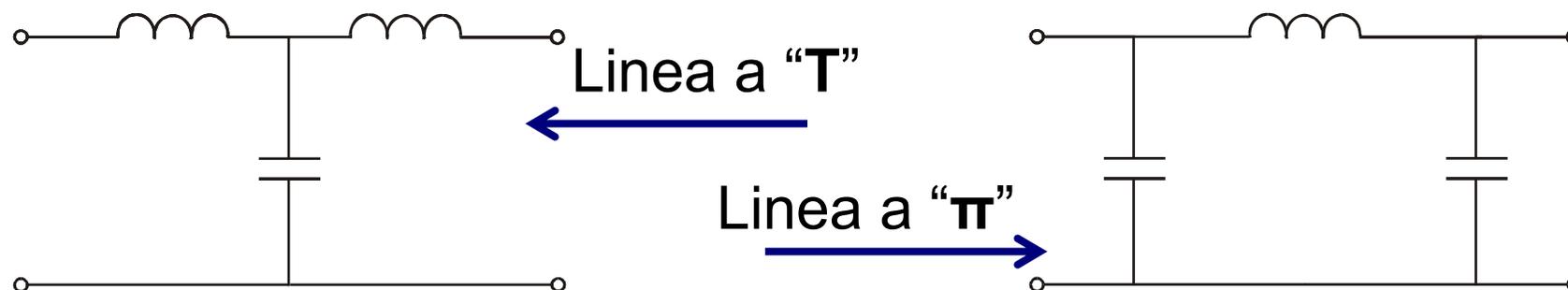


É caratterizzato da due generatori ideali di tensione comandati da corrente



# Doppio bipolo

## ■ Descrizione del D.B. con parametri Z

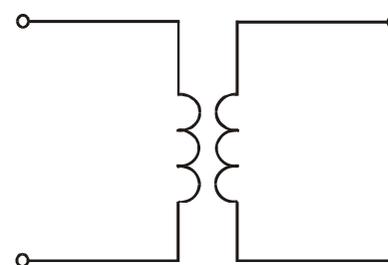
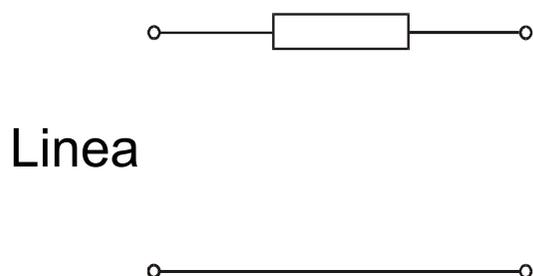


Se il D.B. è passivo e  $Z_{12}=Z_{21}$



Il D.B. è **RECIPROCO**

Alcuni circuiti non ammettono la descrizione con parametri Z, ad esempio:



Trasformatore  
ideale



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri Y

Le variabili indipendenti sono:  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$

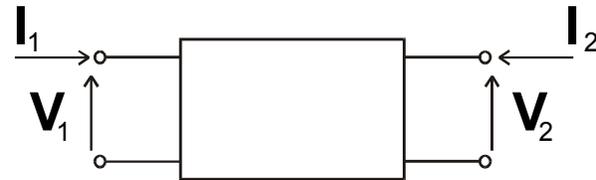


$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{Y}_{11} \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{Y}_{21} \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$



# Doppio bipolo

## ■ Descrizione del D.B. con parametri Y



$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned}$$

$$Y_{11} = \left( \frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0}$$

Ammettenza propria alla porta 1  
con la porta 2 in corto circuito

$$Y_{22} = \left( \frac{I_2}{V_2} \right)_{V_1=0}$$

Ammettenza propria alla porta 2  
con la porta 1 in corto circuito

$$Y_{12} = \left( \frac{I_1}{V_2} \right)_{V_1=0}$$

Ammettenza di trasferimento fra porta 1 e 2

$$Y_{21} = \left( \frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0}$$

Ammettenza di trasferimento fra porta 2 e 1

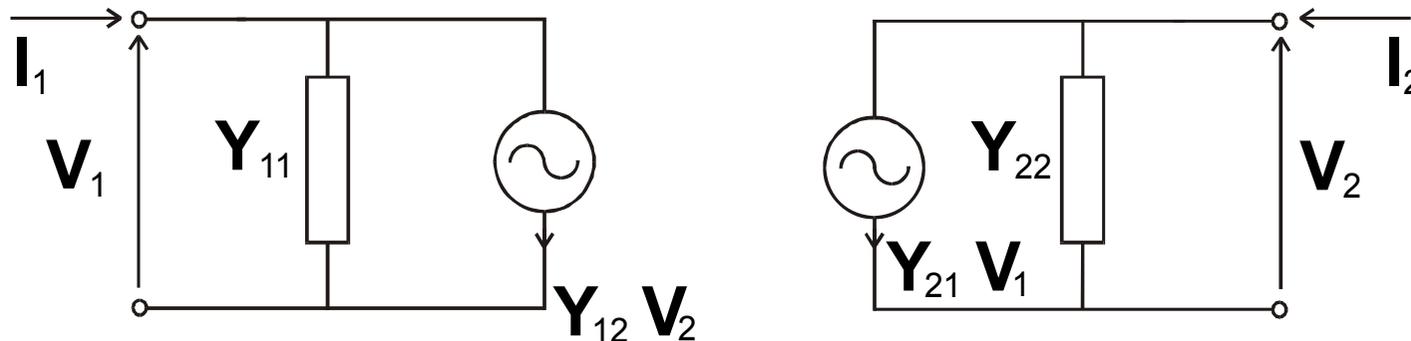
**Si nota che tutti i parametri Y sono definiti in corto circuito**



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri Y

Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:

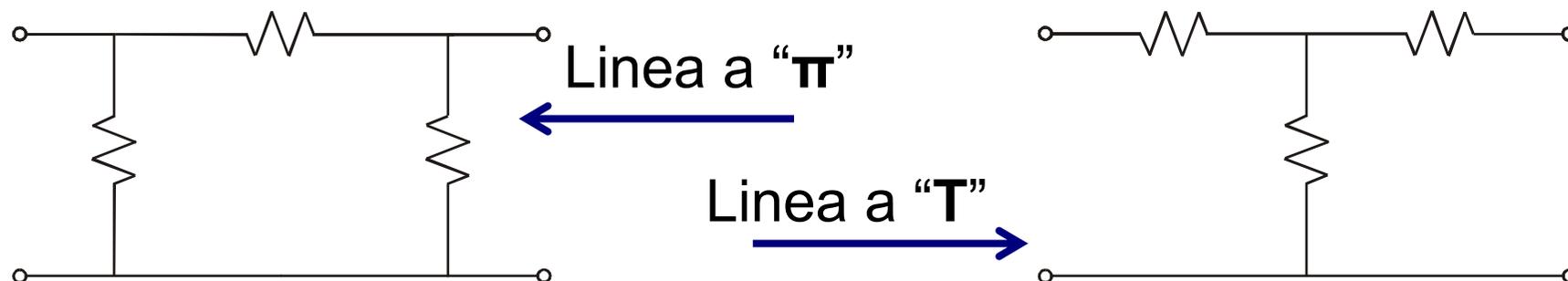


É caratterizzato da due generatori ideali di corrente comandati da tensione



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri Y

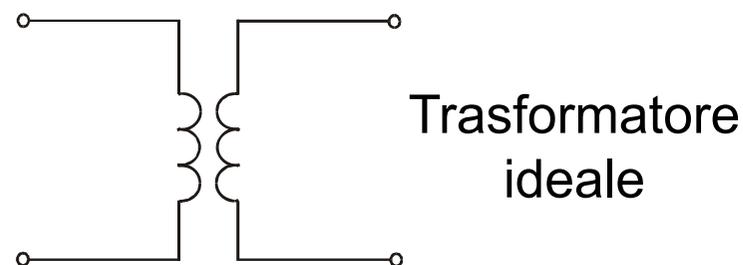
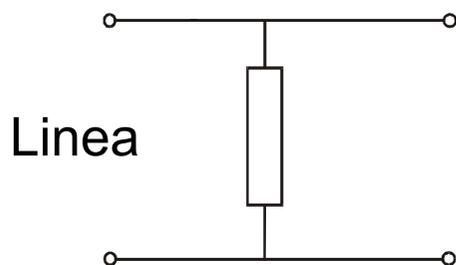


Se il D.B. è passivo e  $Y_{12}=Y_{21}$



Il D.B. è **RECIPROCO**

Alcuni circuiti non ammettono la descrizione con parametri Y, ad esempio:





## Doppio bipolo

- **Descrizione del D.B. con parametri ibridi H**

Le variabili indipendenti sono:  $I_1$ ,  $V_2$

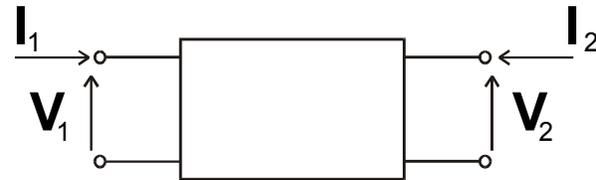


$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned}$$



# Doppio bipolo

## ■ Descrizione del D.B. con parametri H



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{h}_{21} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{h}_{11} = \left( \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

Impedenza propria alla porta 1 con la porta 2 in corto circuito [ $\Omega$ ]

$$\mathbf{h}_{22} = \left( \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{I}_1=0}$$

Ammettenza propria alla porta 2 con la porta 1 aperta [ $\Omega^{-1}$ ]

$$\mathbf{h}_{12} = \left( \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{I}_1=0}$$

Funzione di trasferimento fra tensioni con la porta 1 aperta (adimensionale)

$$\mathbf{h}_{21} = \left( \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

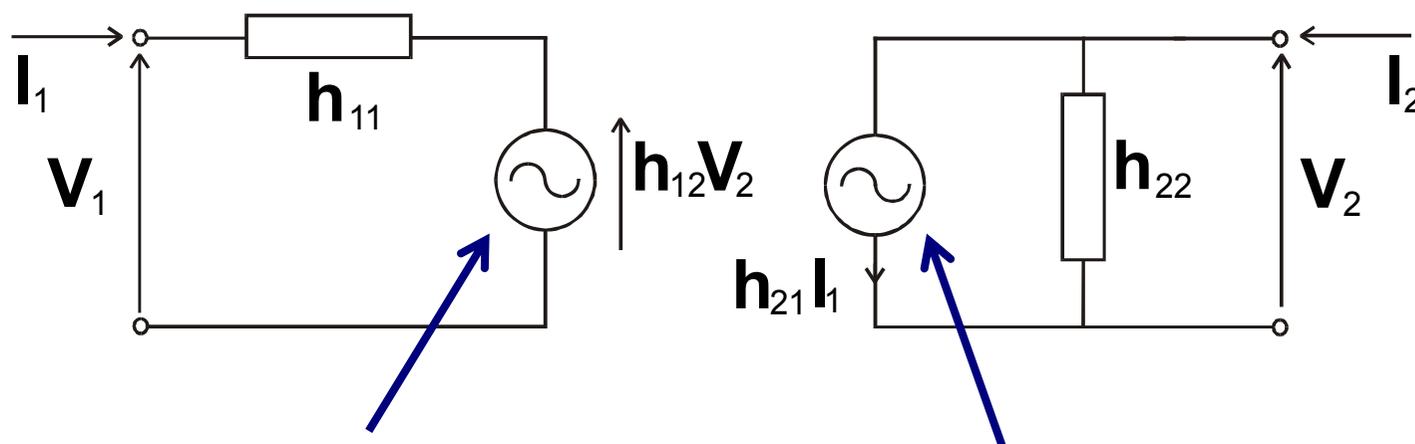
Funzione di trasferimento fra correnti con la porta 2 in corto circuito (adimensionale)



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri H

Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:



Generatore di tensione  
comandato da tensione

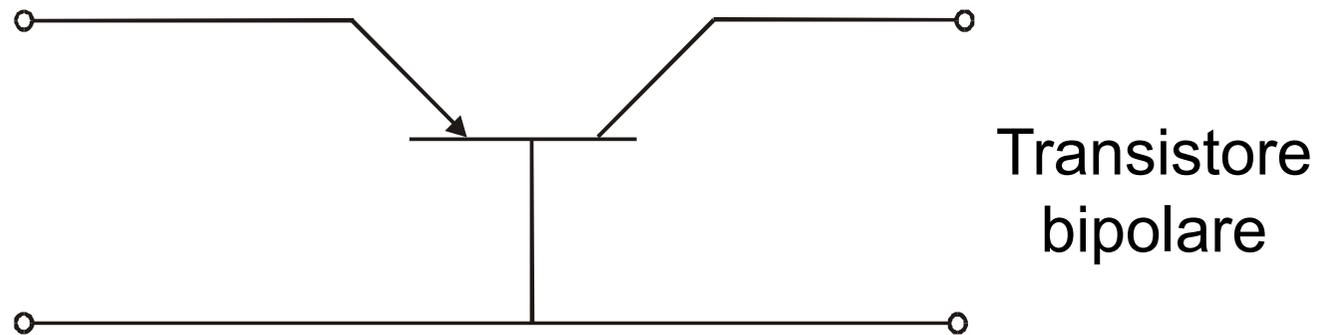
Generatore di corrente  
comandato da corrente



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri H

Esempio di doppio bipolo rappresentabile attraverso i parametri **H**



Se  $h_{12} = -h_{21}$



Il D.B. è **RECIPROCO**



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T

Le variabili indipendenti sono:  $V_2$ ,  $I_2$

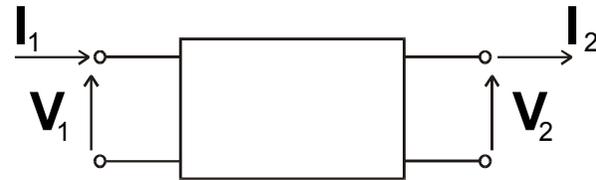


$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2 \\ I_1 &= CV_2 + DI_2 \end{aligned}$$



# Doppio bipolo

## ■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}_{\mathbf{v}_2=0}$$

Impedenza di trasferimento con la porta 2 in corto circuito [ $\Omega$ ]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}_{\mathbf{I}_2=0}$$

Ammettenza di trasferimento con la porta 2 aperta [ $\Omega^{-1}$ ]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}_{\mathbf{I}_2=0}$$

Funzione di trasferimento fra tensioni con la porta 2 aperta (adimensionale)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}_{\mathbf{v}_2=0}$$

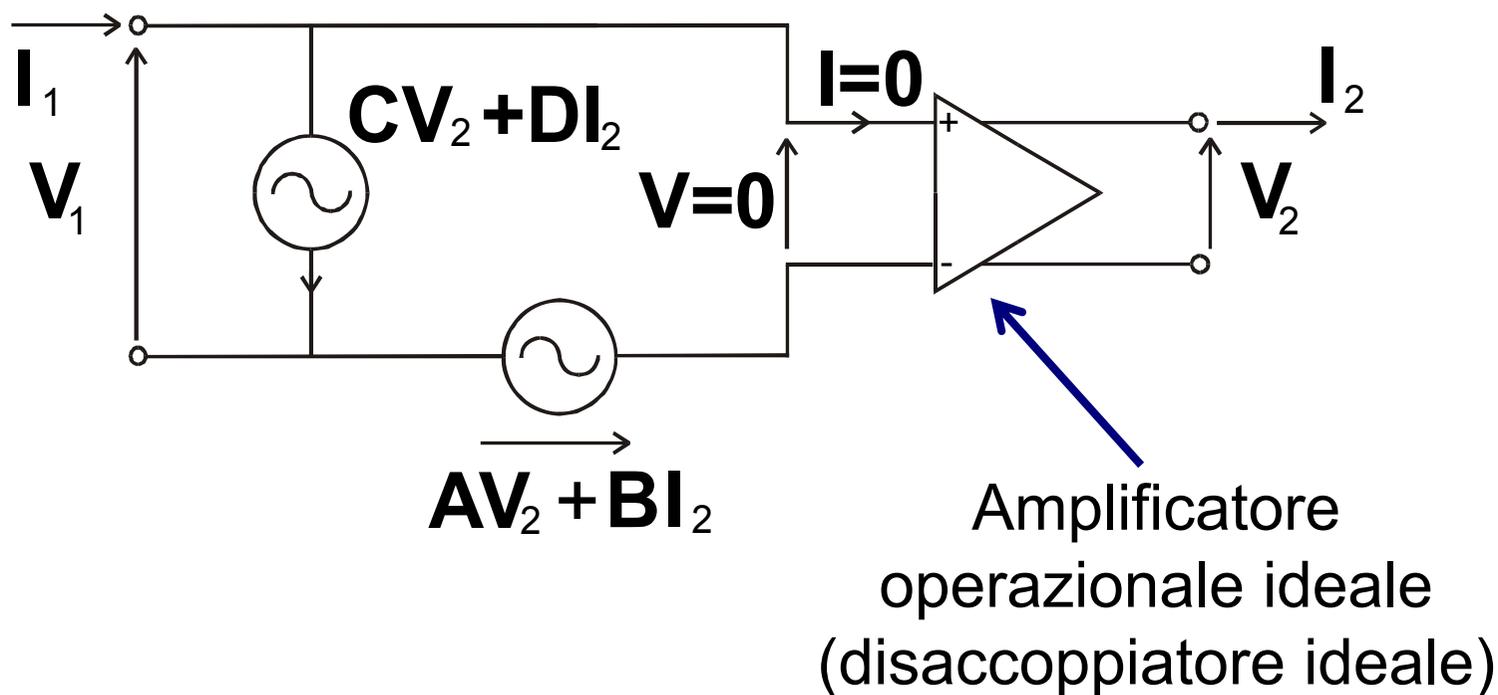
Funzione di trasferimento fra correnti con la porta 2 in corto circuito (adimensionale)



## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T

Il circuito equivalente più generale:

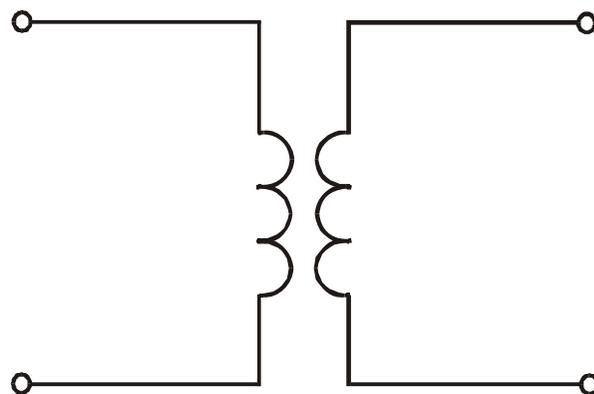




## Doppio bipolo

### ■ Descrizione del D.B. con parametri T

Esempio di doppio bipolo rappresentabile attraverso i parametri ibridi T



Trasformatore  
ideale

Se  $|AD - BC|=1$



Il D.B. è **RECIPROCO**



## Doppio bipolo

### ■ In generale:

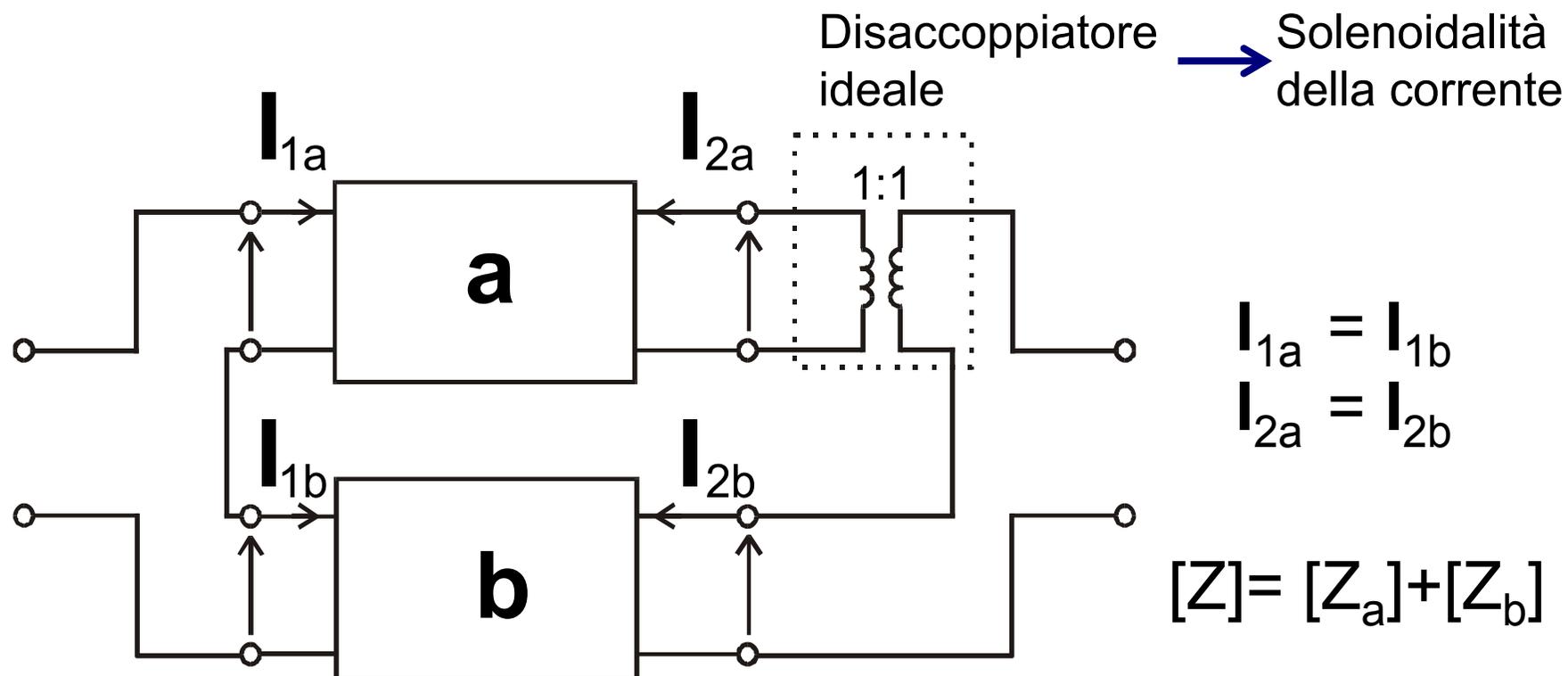
- Dati quattro parametri di una descrizione, è possibile ricavare i corrispondenti parametri di un'altra descrizione dello stesso doppio bipolo per via analitica
  
- Un doppio bipolo ammette almeno una descrizione
  
- Un doppio bipolo può non ammettere tutte le descrizioni possibili



# Doppio bipolo

## ■ Connessioni dei doppi bipoli:

### SERIE

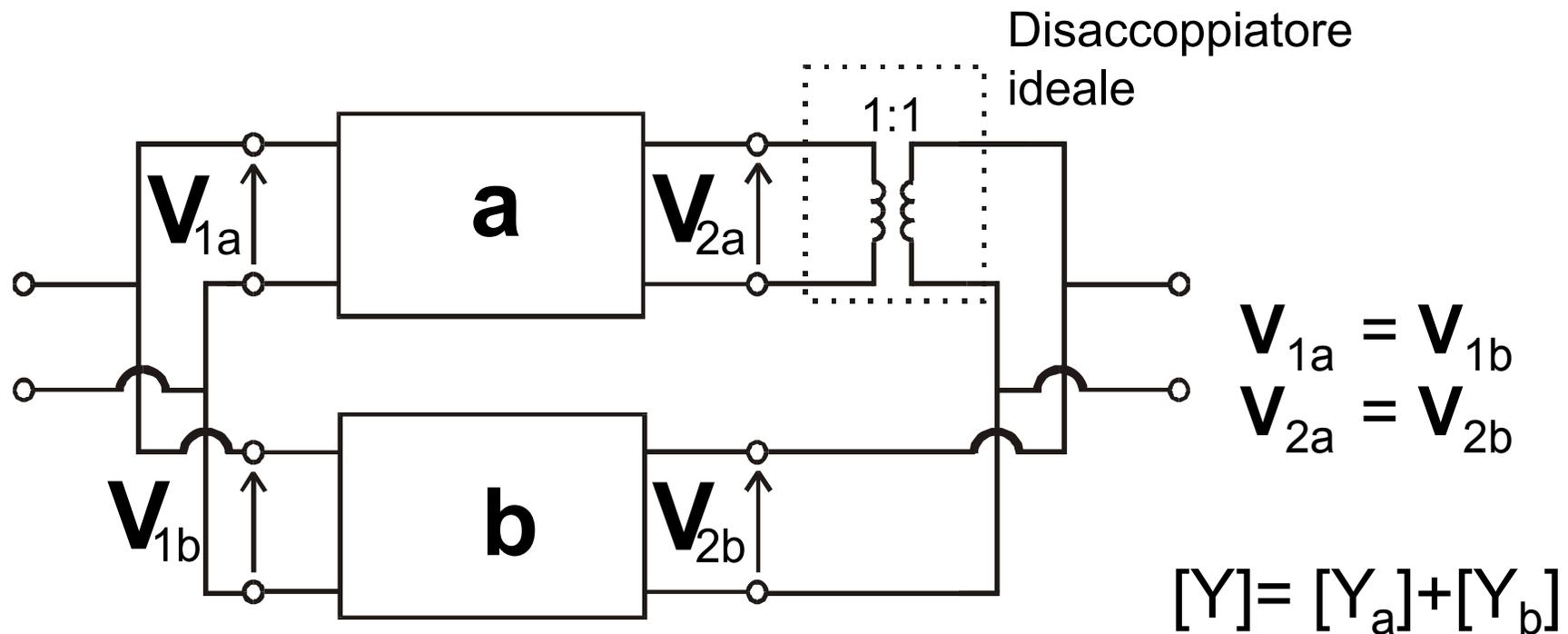




# Doppio bipolo

## ■ Connessioni dei doppi bipoli:

### PARALLELO

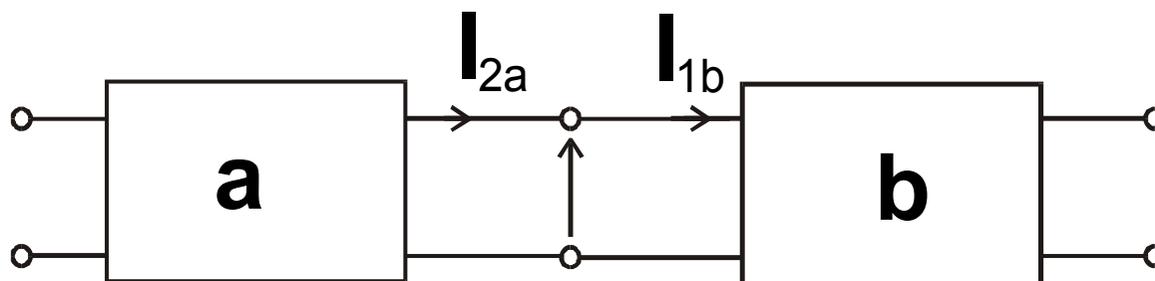




## Doppio bipolo

- Connessioni dei doppi bipoli:

### CASCATA



$$\begin{aligned}V_{2a} &= V_{1b} \\ I_{2a} &= I_{1b}\end{aligned}$$

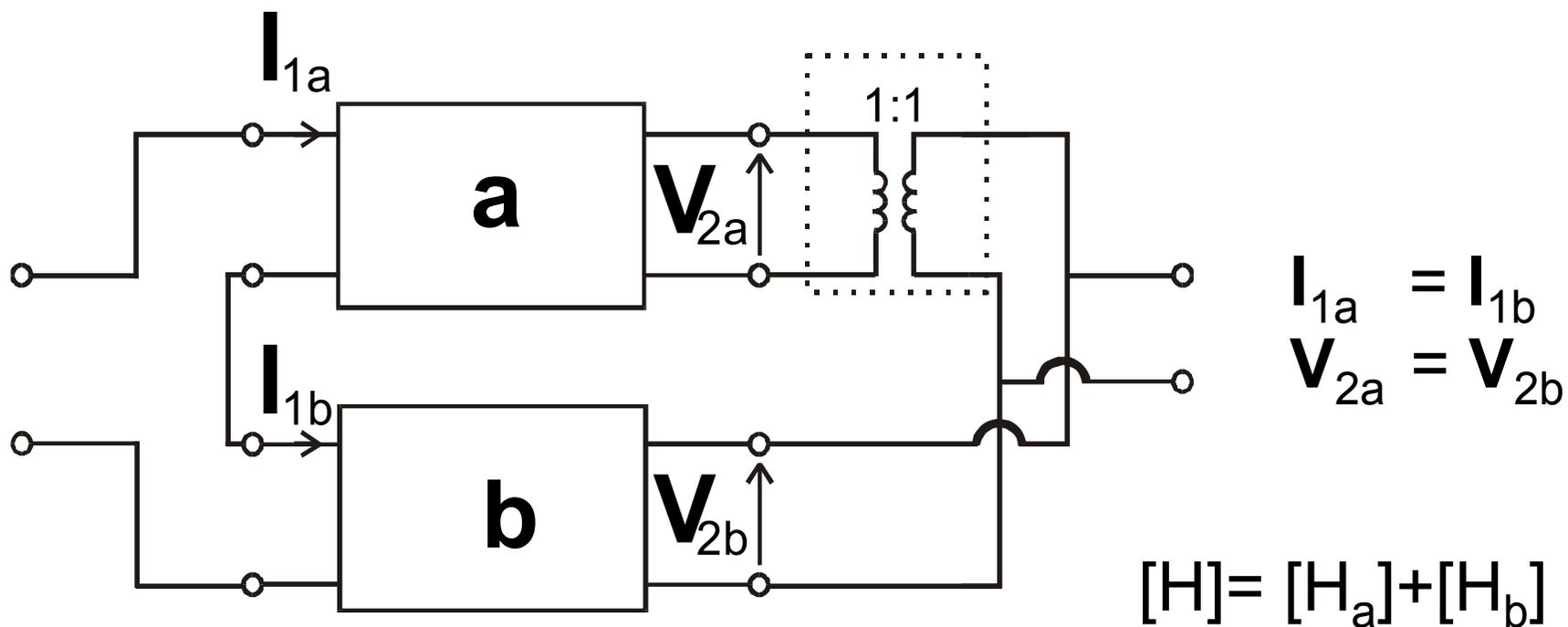
$$[T] = [T_a] [T_b]$$



# Doppio bipolo

- Connessioni dei doppi bipoli:

## SERIE - PARALLELO





## Doppio bipolo

### ■ Connessioni dei doppi bipoli:

## PARALLELO - SERIE

