



Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Elettrotecnica

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare



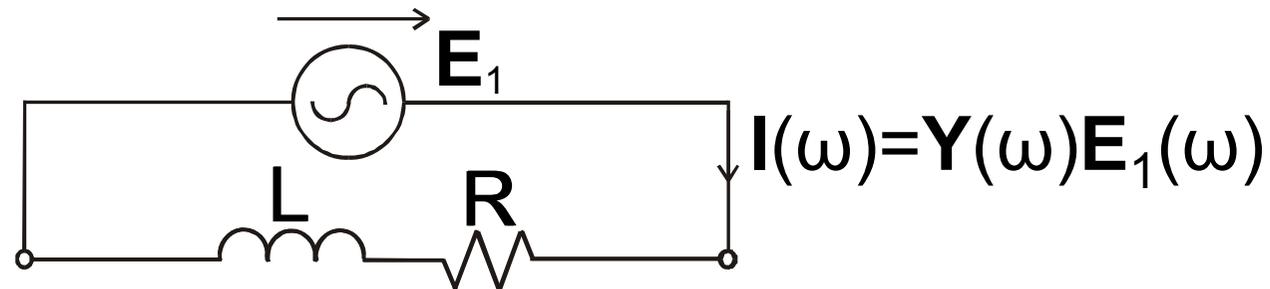
$$\left\{ \begin{array}{l} Z(\omega) \\ \varphi(\omega) \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{Z} = Z \angle \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(\omega) \\ \vartheta(\omega) \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{Y} = Y \angle \vartheta$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Esempio



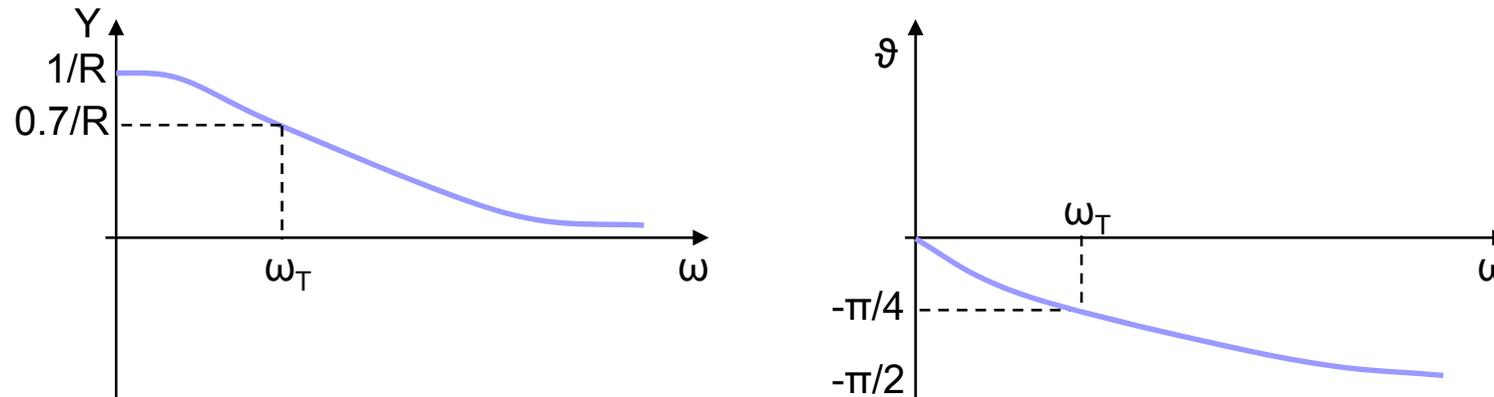
$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \tan^{-1}(\omega L/R) = Z \angle \varphi$$

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega L/R) = Y \angle \vartheta$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Esempio



SI DEFINISCE FREQUENZA DI TAGLIO O NATURALE

$$\omega_T = R/L$$

IN CORRISPONDENZA DI ESSA

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} = \frac{Y_{MAX}}{\sqrt{2}} \quad \vartheta = -\pi/4$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Esempio

LA POTENZA ATTIVA ASSORBITA
IN QUESTO CASO SARA'

$$R|I|^2 = RE_1^2 Y^2 = \frac{RE_1^2}{2R^2} =$$

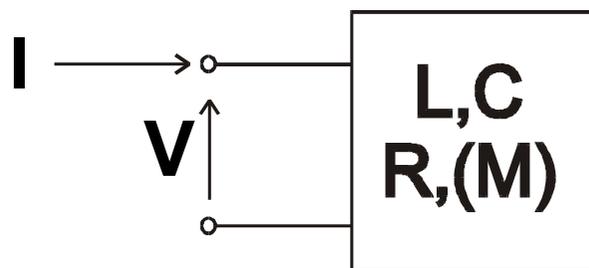
$$= \frac{E_1^2}{2R} = \frac{1}{2} P_{\max}$$

↓
($\omega = 0$)



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti



$$Z = Z \angle \varphi$$

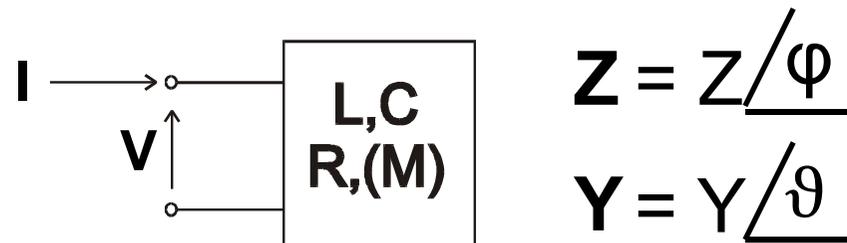
$$Y = Y \angle \vartheta$$

Sia dato un bipolo passivo lineare in regime P.A.S.
a pulsazione ω contenente **almeno**
un **CONDENSATORE** e un **INDUTTORE**



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti



Al variare di ω (o dei parametri) si hanno condizioni di risonanza quando:

$$\varphi=0, \vartheta=0, V \text{ e } I \text{ sono in fase}$$

IL BIPOLO ASSORBE SOLO POTENZA ATTIVA



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

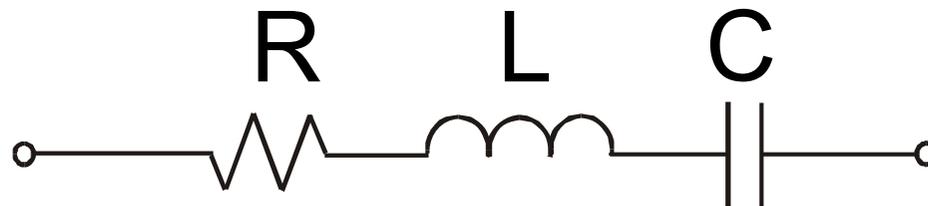
■ Bipoli risonanti – Ricerca della risonanza

$$\operatorname{Im}\{Y(\omega)\} = 0 \quad \operatorname{Im}\{Z(\omega)\} = 0$$



I e V in fase

Esempio: bipolo RLC serie





Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Ricerca della risonanza

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = G_{eq} + jB_{eq}$$

$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R_{eq} + jX_{eq}$$

In generale equazioni
algebriche in ω di grado $n \geq 2$

$$\begin{cases} B_{eq}(\omega) = 0 \\ X_{eq}(\omega) = 0 \end{cases}$$

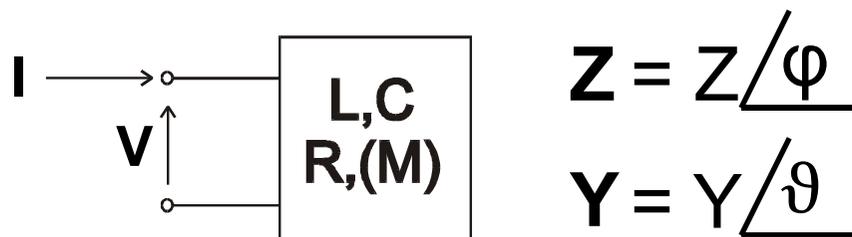


Insieme discreto di radici
 $\omega_{0k} > 0, k \geq 1$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti



Più in generale, si ha risonanza al variare di ω quando $Z(\omega)$ e $Y(\omega)$ hanno un estremo relativo (al limite \emptyset oppure ∞)



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti

Definizioni:

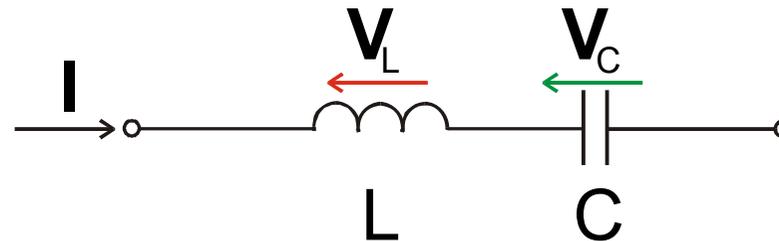
Risonanza serie – il modulo di $\mathbf{Z}(\omega)$ ha un minimo (al limite uno zero) e il modulo di $\mathbf{Y}(\omega)$ ha un massimo (al limite ∞)

Risonanza parallelo – il modulo di $\mathbf{Z}(\omega)$ ha un massimo (al limite ∞) e il modulo di $\mathbf{Y}(\omega)$ ha un minimo (al limite uno zero)



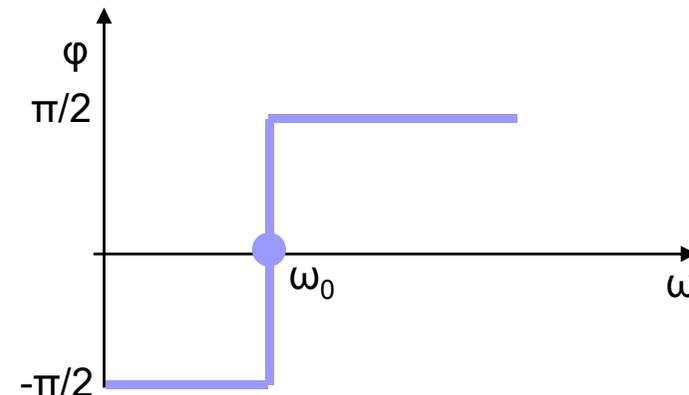
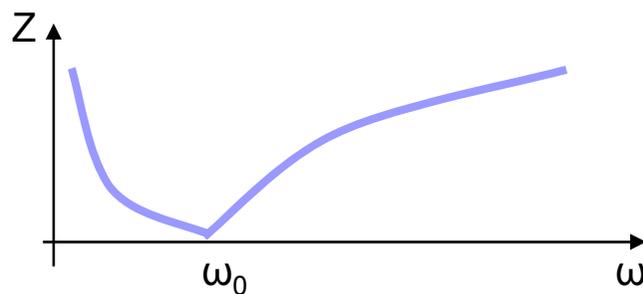
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo LC serie



$$\mathbf{Z} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \angle \varphi = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| \angle \tan^{-1} \pm \infty$$

RISPOSTA IN FREQUENZA





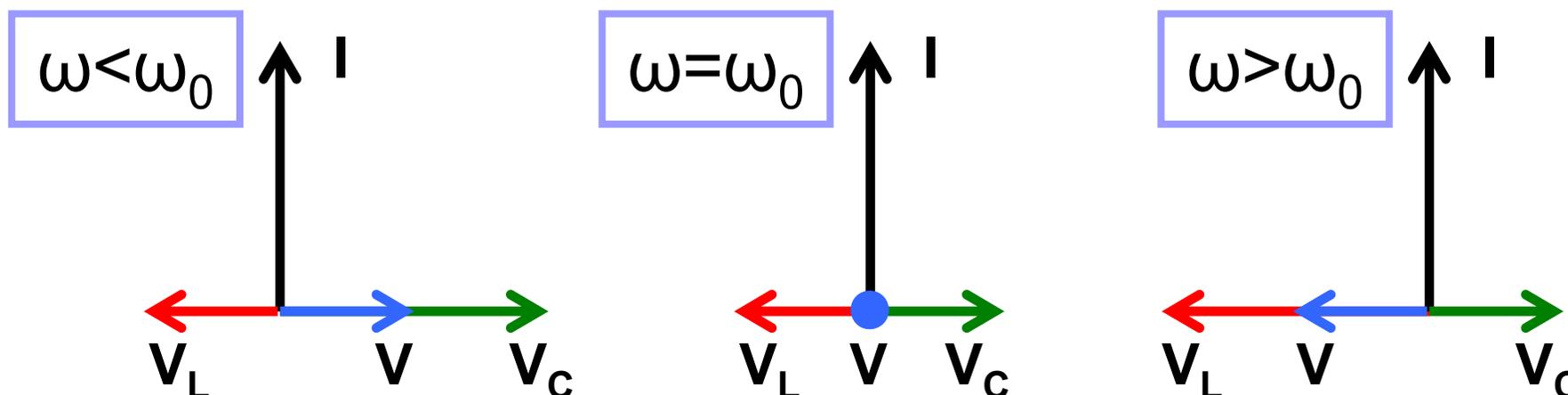
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo LC serie

RISONANZA

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \omega_0^2 LC - 1 = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

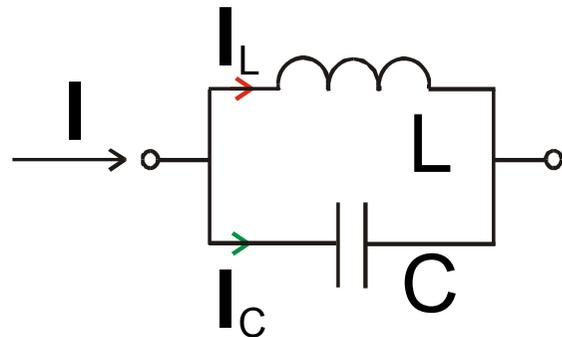
DIAGRAMMA VETTORIALE





Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

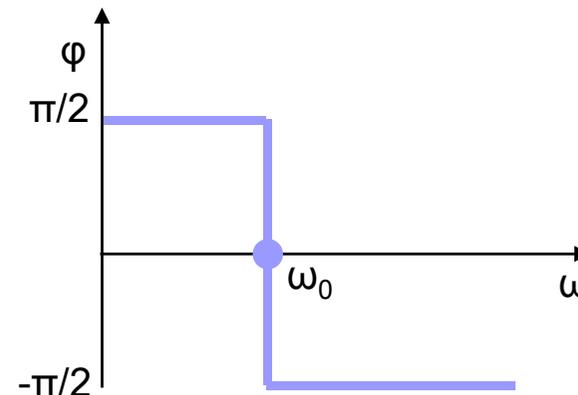
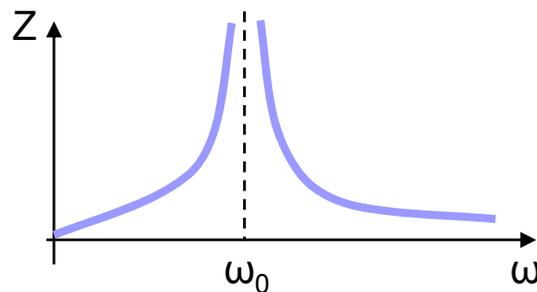
■ Bipoli risonanti – Bipolo LC parallelo



$$Y = j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = Z / \varphi = \left| \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right| \angle \tan^{-1} \pm \infty$$

RISPOSTA IN FREQUENZA





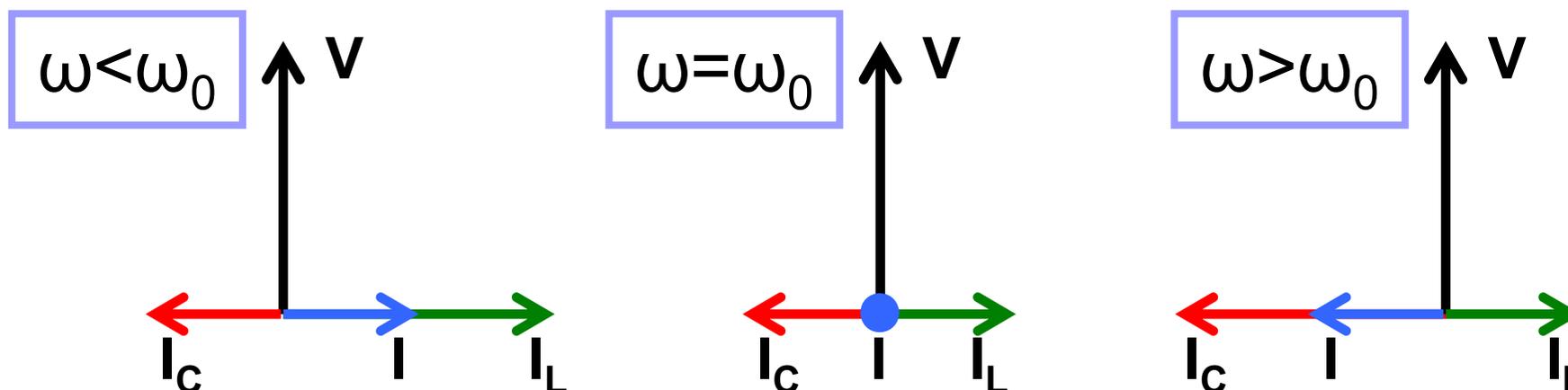
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo LC parallelo

RISONANZA

$$1 - \omega_0^2 LC = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

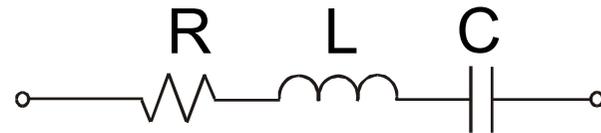
DIAGRAMMA VETTORIALE





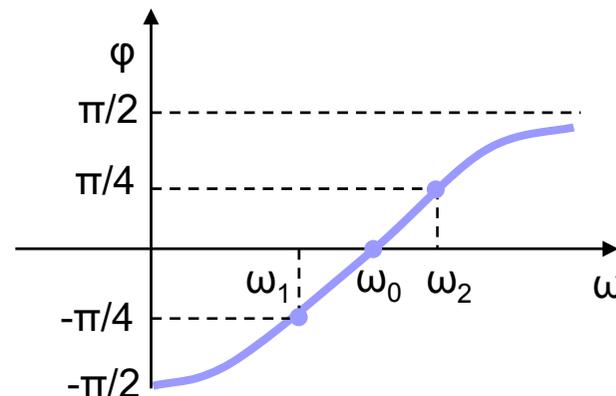
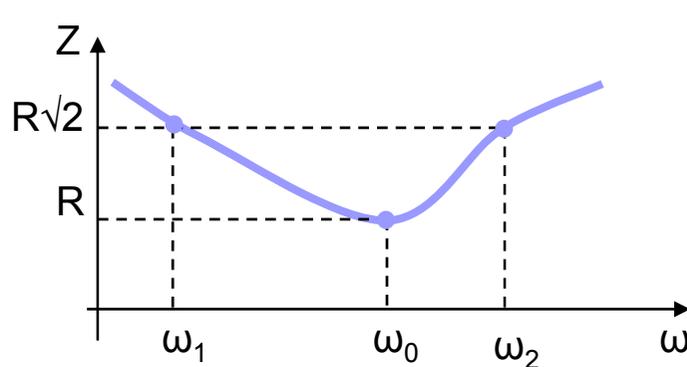
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie



$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \angle \varphi = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

RISPOSTA IN FREQUENZA





Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

RISONANZA

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ Z(\omega) \text{ min} \end{array} \right.$$

SE

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\min Z(\omega) = Z(\omega_0) = R$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

PULSAZIONI DI TAGLIO (1)

$$\omega_1, \omega_2 \quad \text{tali che} \quad Z = R\sqrt{2}$$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{2}$$

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -R$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

PULSAZIONI DI TAGLIO (2)

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0$$

$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega = \frac{RC \pm \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

LARGHEZZA DI BANDA

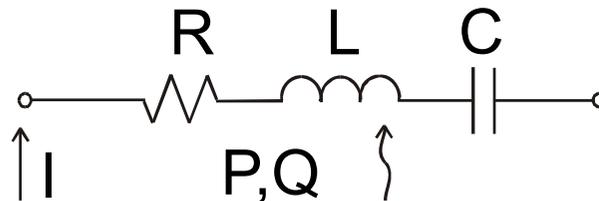
$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L}$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

□ CRITERIO ENERGETICO (1)



$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$P = RI^2 \quad Q = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)I^2$$

$$Q = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**
 - **CRITERIO ENERGETICO (2)**

Larghezza di banda $B = \omega_2 - \omega_1$

Intervallo di ω tale che la potenza reattiva non superi quella attiva

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|^2 \leq P = RI^2$$

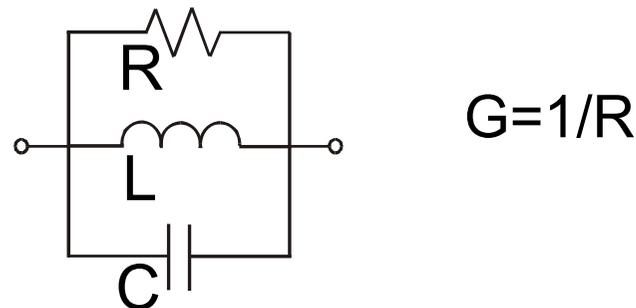
$$Q = \left| \omega_T L - \frac{1}{\omega_T C} \right|^2 = RI^2$$

$$\omega_T = \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \end{cases}$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC parallelo



$$\mathbf{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

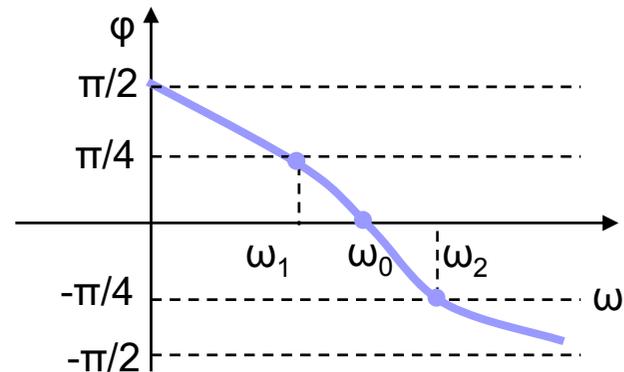
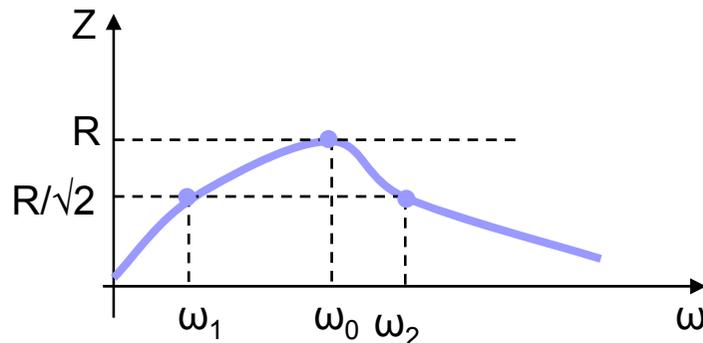
$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$



Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

■ Bipoli risonanti – Bipolo RLC parallelo

RISPOSTA IN FREQUENZA



RISONANZA

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ Z(\omega) \text{ max} \end{cases}$$

SE

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\max Z(\omega) = Z(\omega_0) = R$$