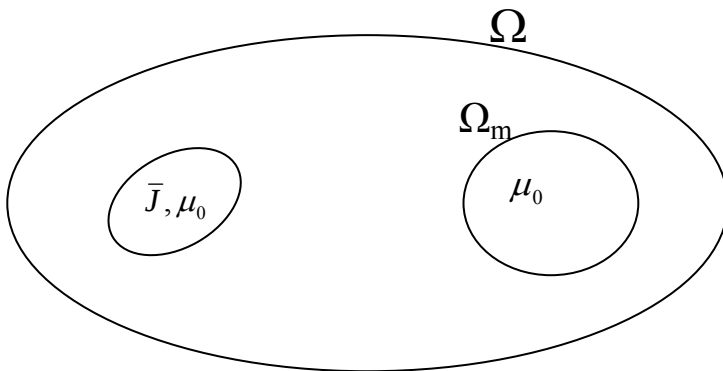


Formulazioni della magnetostatica: il potenziale scalare ridotto

Si consideri una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, semplicemente connessa, avente permeabilità magnetica μ_0 , al cui interno sia contenuta una sottoregione Ω_m di materiale ferromagnetico la cui permeabilità relativa valga μ_r .

Si vuole valutare la reazione del materiale magnetico quando Ω è sottoposto ad un campo magnetico prodotto da una densità di corrente pari a $\bar{J}$.

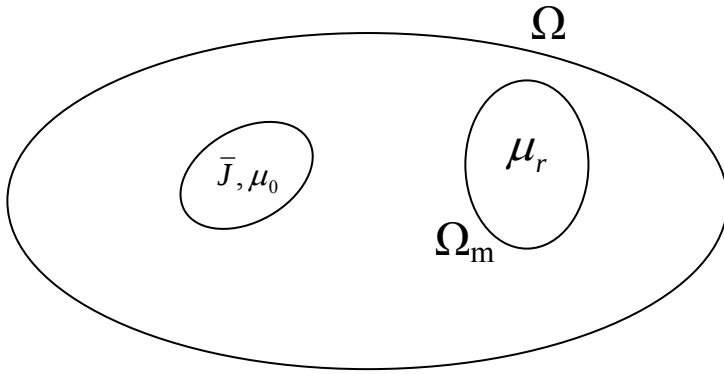
Per prima cosa si consideri la regione Ω costituita interamente dal materiale a permeabilità μ_0 e si ricavi il campo magnetico $\bar{H}$ generato da $\bar{J}$.



In questo caso si ha: $\mu = \mu_0|_{\Omega \setminus \Omega_m} + \mu_0|_{\Omega_m}$ (1)

Dalla seconda legge di Maxwell si ha: $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ (2)

Si consideri ora la regione Ω in cui è inclusa la sottoregione, Ω_m , contenente materiale ferromagnetico. In questo caso la medesima densità di corrente $\bar{J}$ produce un campo magnetico $\bar{H} \neq \bar{H}$.



La permeabilità è : $\mu = \mu_0|_{\Omega \setminus \Omega_m} + \mu_0 \mu_r|_{\Omega_m}$ (3)

Dato che la densità di corrente non è cambiata, si ha: $\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}$ (4)

Si valuti ora il campo differenza ,ottenuto sottraendo la (2) dalla (4):

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} - \bar{\nabla} \times \bar{\bar{H}} = \bar{\nabla} \times (\bar{H} - \bar{\bar{H}}) = 0 \quad (5)$$

Si definisce la funzione scalare ψ [A] tale che: $-\bar{\nabla} \psi = \bar{H} - \bar{\bar{H}}$ (6)
 ψ prende il nome di potenziale scalare ridotto.

Questo è possibile perché il rotore del gradiente di una qualsiasi funzione scalare è sempre identicamente nullo, cioè, per ogni funzione ψ scalare vale: $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \psi) = 0$.

Il potenziale scalare ψ verifica sempre la condizione (5) ed è definito univocamente grazie all'ipotesi di semplice connessione della regione.

Il segno “-“ dipende dalle convenzioni adottate per il gradiente e per il potenziale. Infatti, il vettore campo è orientato da punti con potenziale maggiore a punti con potenziale minore, mentre il gradiente ha il verso della crescita della funzione a cui è applicato. In conclusione, il verso convenzionalmente adottato positivo per $\bar{H}$ è opposto al gradiente di ψ .

Il campo incognito $\bar{H}$ si scrive come: $\bar{H} = \bar{\bar{H}} - \bar{\nabla} \psi$ (7)

Serve ora trovare una relazione che crei un legame diretto fra $\bar{\bar{H}}$ e $\bar{J}$.

A questo scopo si possono sfruttare la definizione di campo di induzione magnetica $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$ e la formula di Green del potenziale vettore in un dominio illimitato (quale può essere considerato Ω trascurando le condizioni al contorno):

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\bar{J}}{\|r\|} d\Omega \quad (8)$$

dove r è la distanza fra il punto campo P e il punto sorgente Q : $\bar{r} = \bar{r}_P - \bar{r}_Q$.

Valutando il campo nel punto P, si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{B}_P &= \bar{\nabla}_P \times \bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \bar{\nabla}_P \times \left(\frac{\bar{J}}{\|r\|} \right) d\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\bar{\nabla}_P \frac{1}{\|r\|} \right) \times \bar{J} + \frac{1}{\|r\|} \bar{\nabla}_P \times \bar{J} d\Omega = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left(-\bar{J} \times \left(\bar{\nabla}_P \frac{1}{\|r\|} \right) + \frac{1}{\|r\|} \bar{\nabla}_P \times \bar{J} \right) d\Omega\end{aligned}\quad (9)$$

La densità di carica $\bar{J}$ dipende dalle caratteristiche della sorgente ed è dipendente solo dal punto Q. Pertanto $\bar{\nabla}_P \times \bar{J} = 0$.

Inoltre il gradiente di $\frac{1}{\|r\|}$ vale: $\bar{\nabla}_P \left(\frac{1}{\|r\|} \right) = -\frac{\bar{r}}{\|r\|^3}$ (*).

Sostituendo le espressioni trovate nella (9) si ricava:

$$\bar{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left(-\bar{J} \times \left(-\frac{\bar{r}}{\|r\|^3} \right) \right) d\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\bar{J} \times \bar{r}}{\|r\|^3} d\Omega \quad (10)$$

La (10) va sotto il nome di legge di Laplace dell'azione elementare.

Si sfrutta ora la relazione costitutiva del materiale a permeabilità μ_0 :

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad (11)$$

così da ottenere l'espressione cercata:

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\bar{J} \times \bar{r}}{\|r\|^3} d\Omega \quad (12)$$

Così il campo magnetico prodotto dalla densità $\bar{J}$ nell'insieme Ω , qualora il materiale sia omogeneo, è direttamente calcolabile conoscendo l'espressione di $\bar{J}$ stessa.

Si utilizza la prima legge di Maxwell: il campo di induzione magnetica è solenoidale.

$$\text{Quindi } \bar{\nabla} \bullet \bar{B} = 0 \quad (13)$$

Utilizzando la (11) applicata all'insieme Ω reale, formato da due materiali differenti e sostituendo quindi μ (3) a μ_0 , e la (7), la (13) può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \bullet \bar{B} &= \bar{\nabla} \bullet (\mu \bar{H}) = \bar{\nabla} \bullet (\mu \bar{H} - \mu \bar{\nabla} \psi) = \bar{\nabla} \bullet \mu \bar{H} - \bar{\nabla} \bullet \mu \bar{\nabla} \psi = 0 \quad \text{e quindi} \\ \bar{\nabla} \bullet \mu \bar{\nabla} \psi &= \bar{\nabla} \bullet \mu \bar{H}\end{aligned}\quad (14)$$

È ora possibile, avendo calcolato $\bar{H}$ tramite la (12), trovare l'espressione del potenziale scalare e, di conseguenza, quella del campo $\bar{H}$. Pertanto la (14) è l'equazione che governa il potenziale ridotto.

Vantaggio del metodo: costo computazionale

ψ è una funzione scalare del punto. Viene quindi rappresentata tramite una sola equazione dipendente dalle coordinate del punto stesso: $\psi = \psi(x, y, z)$.

Al contrario $\vec{H}$ e $\vec{B}$ sono grandezze vettoriali e servono quindi 3 equazioni ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$)

per definirle completamente: $\vec{H} = \begin{pmatrix} H_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) \\ H_z(x, y, z) \end{pmatrix}$.

Il vantaggio computazionale che deriva dal calcolo di ψ invece che di $\vec{H}$ è pertanto notevole.

Se l'insieme Ω non è illimitato bisogna considerare anche le condizioni al contorno.

Sia Γ il bordo di Ω , cioè $\Gamma = \partial\Omega$. Sia inoltre Γ_1 un tratto coincidente con una linea di flusso e Γ_2 un altro tratto ortogonale ad una linea di flusso. Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$1) \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \text{ su } \Gamma_1 \text{ il che equivale a } \vec{n} \cdot \mu \vec{H} = \vec{n} \cdot \mu (\vec{\bar{H}} - \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (15)$$

$$2) \quad \vec{n} \times \vec{H} = 0 \text{ su } \Gamma_2 \text{ cioè } \vec{n} \times (\vec{\bar{H}} - \vec{\nabla} \psi) = 0 \quad (16)$$

È così possibile definire l'andamento di ψ , e quindi di $\vec{H}$, al bordo dell'insieme Ω .

Limite del metodo: errore di cancellazione

Il principale limite risiede nella precisione con cui si calcola il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ nel materiale ferromagnetico tramite la (11), sostituendo $\mu = \mu_0 \mu_r$ a μ_0 .

Infatti, se il materiale magnetico fosse ideale ($\mu \rightarrow \infty$), la sua reazione $-\vec{\nabla} \psi$ alla forzante esterna ($\vec{J}$) sarebbe completa, ottenendo $\vec{H} = 0$. In pratica, il campo $\vec{H}$ è trascurabile rispetto ad $\vec{\bar{H}}$, con residui non nulli variabili da punto a punto in Ω_m . In seguito a queste considerazioni l'espressione (6) diventa:

$$\|\vec{\nabla} \psi\| \cong \|\vec{\bar{H}}\| \quad (17)$$

Nella (17) il passaggio dai vettori ai moduli è stata reso possibile dalla disuguaglianza triangolare inversa (di Cauchy-Schwarz):

$$\|\vec{\bar{H}}\| - \|\vec{\nabla} \psi\| \leq \|\vec{\bar{H}} - \vec{\nabla} \psi\| = \|\vec{H}\| \quad (18)$$

Se $\|\vec{H}\| \rightarrow 0$ allora $\|\vec{\nabla} \psi\| \rightarrow \|\vec{\bar{H}}\|$.

La conseguenza è che gli errori di approssimazione del campo $\vec{H}$ possono avere un ordine di grandezza confrontabile con quello del campo. Quindi, la quasi cancellazione dei termini della sottrazione nelle (18) corrisponde all'errore numerico effettuato nel calcolo di $\vec{H}$ ("elephant subtraction" effect). Inoltre, l'errore di cancellazione si propaga al calcolo dell'induzione, poiché $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ dalla (11), amplificato del fattore μ_r . Dato che la permeabilità relativa dei materiali ferromagnetici è molto elevata, indicativamente $\mu_r = 1000 \div 10000$, l'errore diventa inaccettabile. Il rischio è quindi di ottenere un campo di induzione il cui valore non è attendibile per l'analisi dello stato di magnetizzazione del materiale, avendo un'incertezza eccessivamente elevata.

Formulazione basata su due potenziali scalari: totale Φ e ridotto ψ

Per ovviare al limite dell'errore di cancellazione, preservando il vantaggio del basso costo computazionale, si ricorre ad una formulazione basata su due potenziali scalari. Supponendo, come è stato fatto all'inizio, che all'interno del sottodominio Ω_m non ci sia alcuna corrente, l'equazione di Maxwell diventa la seguente:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \text{in } \Omega_m \quad (19)$$

Si può quindi definire, nel solo materiale ferromagnetico, un nuovo potenziale scalare Φ [A] tale che: $\vec{H} = -\nabla \Phi$ (20)

Φ prende il nome di potenziale scalare totale.

Utilizzando la legge costitutiva per i materiali che compongono Ω , si giunge al sistema di equazioni che rappresenta, in funzione dei potenziali Φ e ψ , l'andamento dell'induzione magnetica in Ω :

$$\begin{cases} \vec{B} = -\mu_0 \mu_r (\nabla \Phi) & \text{in } \Omega_m \\ \vec{B} = \mu_0 (-\nabla \psi + \vec{H}) & \text{in } \Omega \setminus \Omega_m \end{cases} \quad (21)$$

Ciò che ancora manca sono le condizioni di raccordo lungo il bordo $\Gamma_m = \partial\Omega_m$, che in questo caso devono essere imposte per arrivare ad una completa definizione dei due potenziali.

Si deve conservare la componente normale di $\vec{B}$ e quella tangenziale di $\vec{H}$, dunque:

$$\vec{B}(\partial\Omega_m \text{ interno } di \Omega_m) \cdot \vec{n} = \vec{B}(\partial\Omega_m \text{ esterno } di \Omega_m) \cdot \vec{n} \quad \text{e quindi}$$

$$-\mu_r (\nabla \Phi) \cdot \vec{n} = (-\nabla \psi + \vec{H}) \cdot \vec{n} \quad (22)$$

mentre per $\vec{H}$ si scrive:

$\vec{n} \times \vec{H}(\partial\Omega_m \text{ interno } di \Omega_m) = \vec{n} \times \vec{H}(\partial\Omega_m \text{ esterno } di \Omega_m) + \vec{J}_{s,m}$ supponendo che sia assegnata una densità di corrente superficiale lungo Γ_m e quindi

$$-\vec{n} \times \nabla \Phi = \vec{n} \times (-\nabla \psi + \vec{H}) + \vec{J}_{s,m} \quad (23)$$

Le (22)-(23) sono un sistema di due equazioni indipendenti e non omogenee, che rendono univoca la definizione dei due potenziali magnetici.

(*) Nota per il calcolo di $\bar{\nabla}_P \left(\frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \right)$

$$\bar{\mathbf{r}} = (x_P - x_Q)\hat{\mathbf{u}}_x + (y_P - y_Q)\hat{\mathbf{u}}_y + (z_P - z_Q)\hat{\mathbf{u}}_z$$

$$\|\bar{\mathbf{r}}\| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

$$\frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}\|} = \left[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \right]^{-1/2}$$

Dalla definizione di gradiente di ha: $\bar{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{u}}_z$.

Applicandolo alla funzione scalare $\frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$ si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}\|} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(x_P - x_Q)}{\left[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \right]^{3/2}} = -\frac{x_P - x_Q}{\|\mathbf{r}\|^3} = -\frac{r_x}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}\|} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(y_P - y_Q)}{\left[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \right]^{3/2}} = -\frac{y_P - y_Q}{\|\mathbf{r}\|^3} = -\frac{r_y}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}\|} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2(z_P - z_Q)}{\left[(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 \right]^{3/2}} = -\frac{z_P - z_Q}{\|\mathbf{r}\|^3} = -\frac{r_z}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

Si ottiene quindi : $\bar{\nabla} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}\|} \right) = -\frac{\bar{\mathbf{r}}}{\|\bar{\mathbf{r}}\|^3}$.