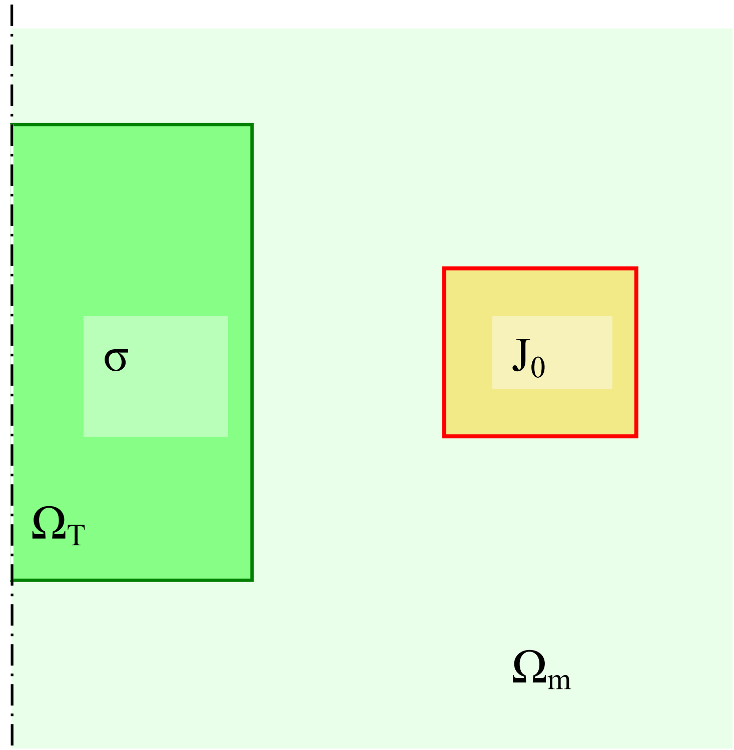
# Problemi di campo accoppiato

Nella maggior parte delle applicazioni, per descrivere in modo esauriente un sistema fisico, è necessario modellizzare più fenomeni distinti l'uno dall'altro che, tuttavia, non sono indipendenti.
L'analisi di questa situazione porta alla soluzione di un sistema di equazioni alle derivate parziali, tempo-varianti, le cui incognite sono i campi che agiscono nella regione oggetto di studio.
Ad esempio, solo in un caso tempo-invariante il campo elettrico esiste indipendentemente da quello magnetico. Nella maggior parte delle situazioni, invece, essi coesistono nello stesso dominio, manifestazioni di un medesimo campo, quello elettromagnetico.
Un caso di notevole interesse per l'ingegneria elettrica è quello elettro-termico.

**<u>PROBLEMA ELETROTERMICO</u>**




Conduttore (1) sede di corrente impressa

Conduttore (2) sede di corrente indotta

Sia dato un sistema assialsimmetrico. Nell'avvolgimento (1) è impressa una corrente specifica $J_0$ variabile nel tempo. Nel conduttore 2 nasce una corrente per induzione elettromagnetica. Il passaggio di corrente in entrambi i conduttori produce una dissipazione di calore per effetto Joule e un aumento di temperatura negli stessi.
Tuttavia, sia le costanti elettriche che quelle termiche di un materiale, variano con la temperatura. Questo vuol dire che, istante per istante, la corrente che circola nei conduttori ne varia la temperatura. Questa a sua volta modifica le caratteristiche fisiche del sistema con una conseguente variazione del campo di corrente.
Allora, il problema termico e quello elettrico non possono essere studiati indipendentemente uno dall'altro.

Si scrive l'equazione della diffusione magnetica per il potenziale vettore in regime quasi - stazionario:

$$-\overline{\nabla} \bullet \mu^{-1}\overline{\nabla}\overline{A} + \sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} = \overline{J}_0 \qquad (1)$$

Si ricorda che per regime quasi - stazionario si intende la situazione in cui la corrente di spostamento $\left\|\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right\|$ è trascurabile rispetto a quella di conduzione $\left\|\sigma\overline{E}\right\|$.

Per quanto riguarda il problema termico, si scrive l'equazione di Fourier per la diffusione del calore:

$$-\overline{\nabla} \bullet k\overline{\nabla}T + c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = p \qquad (2)$$

$k$ = conducibilità termica [W/(mK)]
$c$ = calore specifico [J/(kg*K)]
$\rho$ = densità [kg/m$^3$]
$p$ = potenza specifica [W/m$^3$]

La potenza specifica prodotta dalla corrente indotta J nella sottoregione $\Omega_T$ è:

$$p = \sigma^{-1}\left\|\overline{J}\right\|^2$$

Si potrebbe estendere l'analisi elettro-termica anche all'avvolgimento sede di corrente impressa. In questa sottoregione la potenza specifica è:

$$p = \sigma^{-1}\left\|\overline{J}_0 + \sigma\overline{E}\right\|^2 \qquad (3)$$

Infatti, nell'avvolgimento c'è sia corrente impressa ($J_0$) che corrente indotta ($\sigma$E).

Se la (1) è risolvibile indipendentemente dalla (2) si dice che il problema è "debolmente accoppiato".
In realtà le proprietà magnetiche ed elettriche della materia dipendono dalla temperatura. Ad esempio,oltrepassata la temperatura di Curie, i materiali ferromagnetici perdono le loro proprietà, diventando paramagnetici. Allo stesso modo, la resistività dei conduttori aumenta con la temperatura.
I due problemi, elettrico e magnetico, sono quindi interdipendenti.
Per quanto riguarda l'avanzamento in tempo nell'equazione (2), si può osservare questo: le costanti termiche del sistema sono molto maggiori di quelle elettriche. Si può quindi risolvere l'equazione (1) al variare della temperatura, come se questa fosse volta per volta costante. Una volta trovato il potenziale A, si modifica il termine di corrente indotta nell'equazione (2), ricavando la nuova temperatura al passo di tempo successivo.

Si studia il problema nel dominio della frequenza, supponendo un'eccitazione di tipo AC.
L'equazione (1) può quindi essere riscritta in forma fasoriale.

$$-\overline{\nabla} \bullet \mu^{-1}\overline{\nabla}\dot{\overline{A}} + j\omega\sigma\dot{\overline{A}} = \dot{\overline{J}}_0 \qquad (4)$$

Con $\dot{\overline{A}}$ e $\dot{\overline{J}}$ si sono indicati i fasori corrispondenti alle grandezze vettoriali dell'equazione (1) mentre $j\omega$ trasforma l'operatore di derivata.
Il fasore $\dot{\overline{J}}_0$ dà il contributo della corrente impressa nell'avvolgimento.
Il termine $\omega\dot{A}$ dà il campo elettrico indotto, responsabile del riscaldamento nella regione $\Omega_T$. Allora il termine della potenza, dalla (3) dovrà ogni volta essere aggiornato come segue:

$$p = \sigma^{-1}\left\|\dot{\overline{J}}_0\right\|^2 + \sigma\omega^2\left\|\dot{\overline{A}}\right\|^2 \qquad (5)$$

Si supponga, per semplicità, di aver esaurito il transitorio termico e di poter quindi considerare l'equazione (2) a regime $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$.

$$-\overline{\nabla}\bullet k\overline{\nabla}T=\sigma^{-1}\left\|\dot{\overline{J}}_0\right\|^2+\sigma\omega^2\left\|\dot{\overline{A}}\right\|^2 \qquad (6)$$

Il primo addendo a secondo membro quantifica le perdite per effetto Joule, mentre il secondo addendo fornisce quelle per correnti parassite.
Al secondo membro compare una dipendenza quadratica dal potenziale vettore, che viene linearizzata arrestando lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\sigma\omega^2\left\|\dot{\overline{A}}\right\|^2\cong 2\sigma\omega^2\left\|\dot{\overline{A}}\right\|\cdot\left\|\dot{\overline{A}}\right\|$$

Supponendo di considerare il mezzo lineare sia per quanto riguarda la proprietà magnetiche che quelle di conducibilità, è possibile estrarre dall'operatore divergenza nelle equazioni (4) e (6) rispettivamente μ e k, giungendo alla seguente formulazione:

$$\begin{cases}-\mu^{-1}\nabla^2\dot{\overline{A}}+j\omega\sigma\dot{\overline{A}}=\dot{\overline{J}}_0\\ -k\nabla^2 T=\sigma^{-1}\left\|\dot{\overline{J}}_0\right\|^2+\left(2\sigma\omega^2\dot{\overline{A}}\right)\dot{\overline{A}}\end{cases} \qquad (7)$$

Un sistema di questo tipo viene risolto mediante il metodo degli elementi finiti. Si imposta quindi la griglia del dominio considerato. Le incognite diventano quindi il valore assunto ai nodi dalla temperatura T e dal potenziale vettore A. Ad ogni nodo corrispondono quindi 4 incognite (una dalla temperatura e fino a 3 dalle componenti del potenziale). Nel caso assialsimmetrico o bidimensionale si avranno solo due incognite (temperatura e potenziale) per ogni nodo.
Per semplicità di notazione si pone:
A = vettore dei potenziali nodali magnetici;
T = vettore delle temperature nodali.
In generale, i domini magnetico e termico sono diversi e, di conseguenza, anche le griglie sono diverse ($n_m$ nodi magnetici, $n_T$ nodi termici).

Le (7) possono essere allora riscritte in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}K_A & mat\_2\\ M & K_T\end{bmatrix}}_{mat}\begin{bmatrix}A\\ T\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}B\_1\\ B\_2\end{bmatrix}}_{B} \qquad (8)$$

La matrice mat viene suddivisa in 4 blocchi così definiti.

$K_A=[-\mu^{-1}\overline{\nabla}^2+j\omega\sigma]$ che è quindi quadrata di dimensione ($n_m$ *$n_m$) dove $n_m$ è il numero di nodi sede di potenziale magnetico incognito. Questa sottomatrice prende il nome di "matrice di rigidezza magnetica".

$mat\_2=[0]$ in quanto, come si nota dal sistema (7) nella prima equazione non compare esplicitamente l'incognita temperatura.

$M=[2\sigma\omega^2 A]$ , è di dimensione ($n_T$ *$n_m$) ed è il termine che definisce l'accoppiamento forte fra le incognite magnetiche e quelle termiche. Esso varierà a seconda della forzante. Si sottolinea infatti che, pur essendo un termine della matrice, vi compare esplicitamente l'incognita A.

$K_T=-k\nabla^2$ è una sottomatrice quadrata di dimensione ($n_T$ *$n_T$) dove $n_T$ è il numero di nodi nei quali si vuole determinare la temperatura. E' detta "matrice di rigidezza termica".

Allo stesso modo anche il vettore dei termini noti è stato diviso in due parti:
$B\_1 = J_0$ ha $n_m$ elementi, densità di corrente impressa nell'avvolgimento.
$B\_2 = \sigma^{-1} J_0^2$ ha $n_T$ elementi, densità di potenza nell'avvolgimento.

Si impone $F_A=J_0$ perché è un termine noto di forzante magnetica.
Allo stesso modo si definisce la forzante termica $F_T=\sigma^{-1}J_0^2$.

In corrente continua, si ha $\omega = 0$ e la matrice M è nulla. La matrice del sistema risolvente è quindi diagonale a blocchi. Questo comporta che le due equazioni sono risolvibili separatamente e allora il sistema è debolmente accoppiato.
Nel caso in cui $\omega \neq 0$ la matrice M ha elementi non nulli. Il sistema è fortemente accoppiato e le due equazioni devono essere risolte contemporaneamente.

A questo scopo, si utilizza l'algoritmo delle sostituzioni successive che si articola di 4 punti.
Nel seguito si indicherà con k l'indice dell'iterazione e con il pedice "i" il nodo considerato della griglia. Per semplicità, si suppone che la griglia magnetica coincida con quella termica.

1) Si risolve l'equazione magnetica: $A_i^{(k+1)} = \left(K_A^{(k)}\right)^{-1} F_A^{(k)}$
2) Si aggiorna il termine relativo alla sorgente termica con il contributo $M^{(k)} A_i^{(k+1)}$
3) Si risolve l'equazione termica: $T_i^{(k+1)} = K_T^{-1}\left(F_T^{(k)} - M^{(k)} A_i^{(k+1)}\right)$
4) Si fa un test di convergenza per verificare quando l'errore scende al di sotto di una soglia prestabilita: $\dfrac{\left\|A_i^{(k+1)} - A_i^{(k)}\right\|}{\left\|A_i^{(k)}\right\|} + \dfrac{\left\|T_i^{(k+1)} - T_i^{(k)}\right\|}{\left\|T_i^{(k)}\right\|} \le \varepsilon$ .

   Si evidenzia che è necessario valutare l'errore relativo, in modo tale da poter rendere confrontabili le misure di potenziale magnetico e quelle di temperatura con $\varepsilon$ che è un numero puro.