Sforzo all'interfaccia fra due regioni con differente permeabilità magnetica

Si consideri l'interfaccia fra due regioni, Ω_1 e Ω_2, aventi diversa permeabilità magnetica, rispettivamente μ_1 e μ_2.
Si limiti ora lo studio ad una porzione infinitesima di area dA, che può pertanto essere considerata piana.

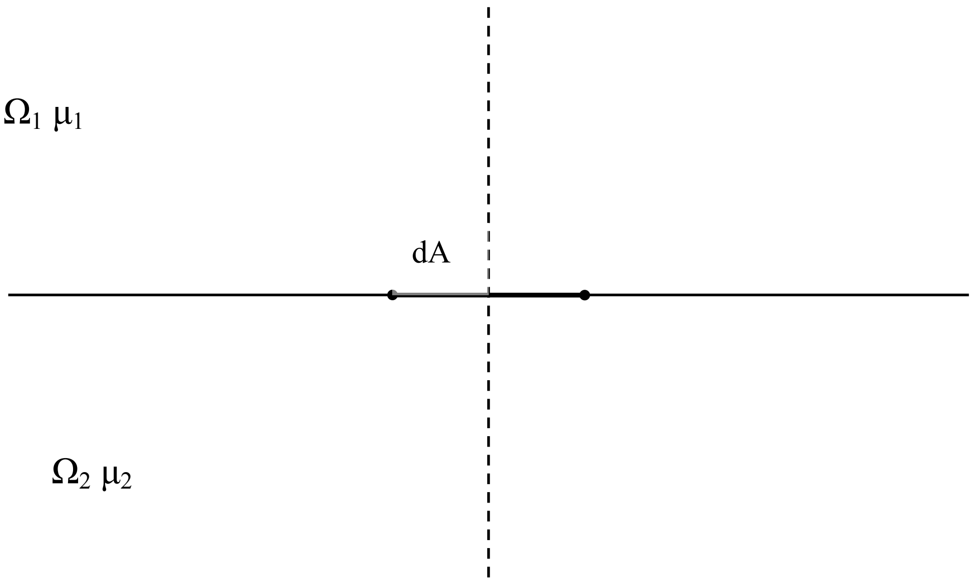

Fig. 1

1) <u>effetto del mezzo 1 sul mezzo 2</u>

Si supponga che nel mezzo 1 esista un campo magnetico H_1 formante un angolo α con la normale alla superficie, di cui si è definito il versore normale uscente $\overline{n}$.

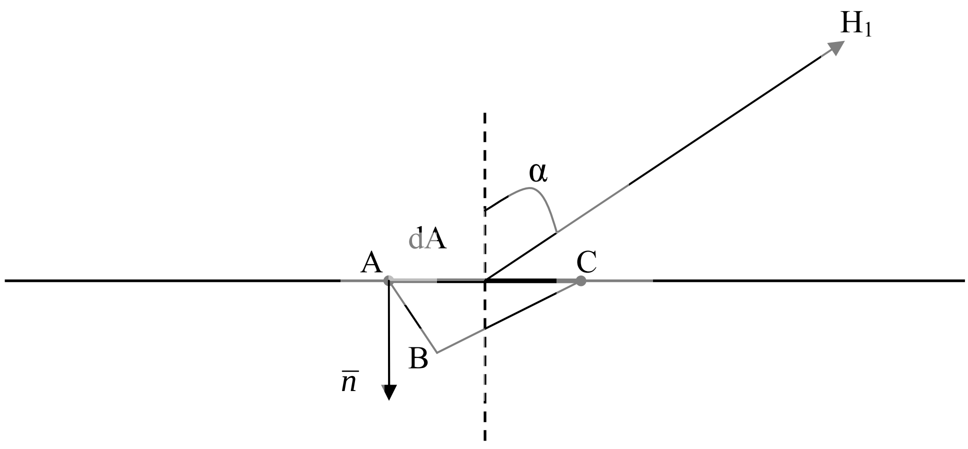

Fig. 2

Si scomponga la superficie dA nelle sue componenti parallela e ortogonale ad H_1:
AB=cos(α)dA;
BC=sen(α)dA; (1)
L'azione del mezzo 1 sul 2 può essere rappresentata mediante uno sforzo σ_1.
Per ricavarne l'espressione in funzione del materiale e del campo in esso presente, si suppone che la relazione B-H sia lineare e si fa riferimento all'energia
$W = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \overline{H} \bullet \overline{B} d\Omega$ (2)
Infatti, uno sforzo può essere inteso sia come forza per unità di superficie che come energia per unità di volume (cfr tensore degli sforzi di Mawell). σ_1 corrisponde quindi all'energia specifica del mezzo 1 : $\sigma_1 = \frac{1}{2}\overline{H}_1 \bullet \overline{B}_1$ (3)
Il campo H_1 produce sulla superficie dA una forza infinitesima dF_1.
Si scomponga ora dF_1 nelle due direzioni, parallela ℓ ed ortogonale q a H_1.

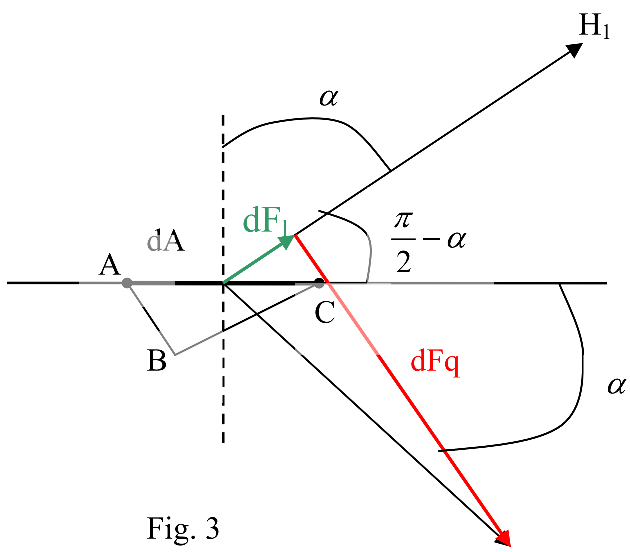

Fig. 3

Ciascuna di queste componenti può essere calcolata come prodotto dello sforzo σ_1 per la superficie ortogonale alla direzione della forza stessa:
$$\begin{cases} dF_\ell = \sigma_1 AB = \sigma_1 \cos(\alpha) dA \\ dF_q = \sigma_1 BC = \sigma_1 sen(\alpha) dA \end{cases} \quad (4)$$
La prima componente, dF_l, corrisponde ad una trazione longitudinale mentre la seconda, dF_q,corrisponde ad una pressione trasversale.
La forza può anche essere scomposta secondo le due componenti parallela t ed ortogonale n alla superficie dA.

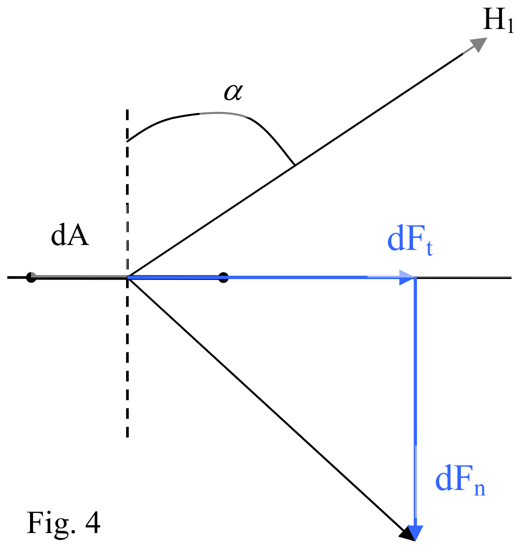

Fig. 4

$$\begin{cases} dF_t = dF_H\,sen\alpha + dF_q\cos\alpha \\ dF_n = dF_H\cos\alpha - dF_q\,sen\alpha \end{cases} \qquad (5)$$

Le (5) possono essere riscritte usando le (4):

$$\begin{cases} dF_{t1} = dF_H\,sen\alpha + dF_q\cos\alpha = \sigma_1\cos(\alpha)sen(\alpha)dA + \sigma_1 sen(\alpha)\cos(\alpha)dA = \sigma_1 sen(2\alpha)dA \\ dF_{n1} = dF_H\cos\alpha - dF_q\,sen\alpha = \sigma_1\cos^2(\alpha)dA - \sigma_1 sen^2(\alpha)dA = 2\sigma_1\cos(2\alpha)dA \end{cases} \qquad (6)$$

Dalle (6) si deduce che l'angolo formato fra il campo H_1 e la forza dF_1 è α.
Si utilizza ora la relazione (3) che, supponendo il mezzo 1 lineare e isotropo, diventa:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}H_1B_1 = \frac{1}{2}H_1\mu_1H_1 \qquad (7)$$

E' utile scomporre il vettore H_1 nelle componenti parallela ed ortogonale alla superficie dA:

$$\begin{cases} H_{1t} = H_1 sen(\alpha) \\ H_{1n} = H_1\cos(\alpha) \end{cases} \qquad (8)$$

Allora le (6) possono essere rielaborate così:

$$\begin{cases} dF_{t1} = \sigma_1 sen(2\alpha)dA = \frac{1}{2}H_1\mu_1H_1 sen(2\alpha)dA = H_1\mu_1H_1 sen(\alpha)\cos(\alpha)dA = \mu_1 H_{1t}H_{1n}dA \\ dF_{n1} = 2\sigma_1\cos(2\alpha)dA = H_1\mu_1H_1\cos(2\alpha)dA = \mu_1 H_1^{\,2}\frac{\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right)}{2}dA = \\ = \frac{1}{2}\mu_1\left(H^2_{1n} - H^2_{1t}\right)dA \end{cases} \qquad (9)$$

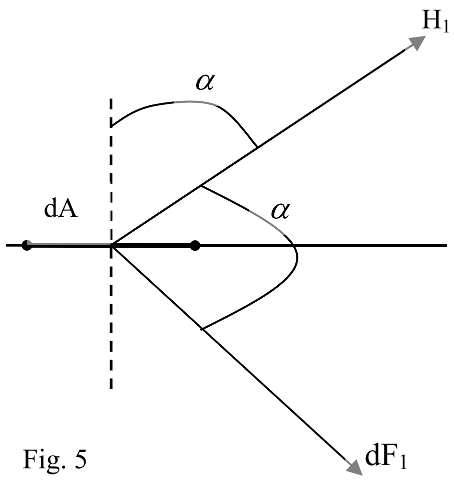

Fig. 5

Nella figura 5 si è messo in evidenza come il campo H_1 bisechi l'angolo formato dalla forza dF_1 con la normale alla superficie (legge geometrica deducibile dalle eq.ni (6)). Nella tabella seguente si riportano alcuni casi particolari:

angolo fra H_1 e la normale a dA	Angolo fra dF_1 e la normale a dA	considerazioni
0°	0°	La forza produce una trazione che tende a "separare" le due regioni
45°	90°	La forza produce uno sforzo di taglio alla superficie di separazione dA
90°	180°	La forza genera una pressione che tende a far entrare il mezzo 1 nel mezzo 2

3) <u>Effetto del materiale 2 su 1</u>

Attraverso un identico procedimento, riferendo tutti i parametri al mezzo 2, si giunge ad una formulazione equivalente alle (9). Essa fornisce le componenti tangenziale e normale alla superficie dA della forza dF_2 in funzione del campo H_2 e della caratteristica del mezzo stesso (μ_2). Questa forza è pertanto l'effetto prodotto all'interfaccia fra i due materiali, dal campo H_2 .

$$\begin{cases} dF_{t2} = \sigma_2 sen(2\alpha_2)dA = \frac{1}{2}H_2\mu_2 H_2 sen(2\alpha_2)dA = H_2\mu_2 H_2 sen(\alpha_2)\cos(\alpha_2)dA = \mu_2 H_{2t} H_{2n} dA \\ dF_{n2} = -2\sigma_2\cos(2\alpha_2)dA = -H_2\mu_2 H_2\cos(2\alpha_2)dA = -\mu_2 H_2{}^2\frac{\left(\cos^2\alpha_2 - sen^2\alpha_2\right)}{2}dA = \\ = -\frac{1}{2}\mu_2\left(H^2{}_{2n} - H^2{}_{2t}\right)dA \end{cases} \quad (10)$$

La componente normale ha segno negativo perché è diretta in verso contrario rispetto al versore normale $\bar{n}$.

4) Forza risultante

Per capire l'andamento della forza risultante all'interfaccia bisogna imporre le condizioni di trasmissione:

$$\begin{cases} H_{t1} = H_{t2} \\ \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \end{cases} \qquad (11)$$

La seconda delle (11) corrisponde alla conservazione della componente normale di B che, sotto l'ipotesi di materiali isotropi e lineari, può essere sostituita dal prodotto fra la permeabilità magnetica e il vettore campo H.

Allora le (10) possono essere riscritte così:

$$\begin{cases} dF_{t2} = \mu_2 H_{2t} H_{2n} dA = \mu_2 H_{1t} \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\left(-H_{1n}\right) dA = -dF_{t1} \\ dF_{n2} = -\dfrac{1}{2}\mu_2\left(H^2{}_{2n} - H^2{}_{2t}\right) dA = -\dfrac{1}{2}\mu_2 \left\{ \left[\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\left(-H_{1n}\right)\right]^2 - H^2{}_{1t} \right\} dA \end{cases} \qquad (12)$$

Nella prima delle (12) il segno '-' dipende sempre dal verso scelto convenzionalmente positivo per i vettori perpendicolari alla superficie, rappresentata dal vettore $\bar{n}$.

Sempre dalla prima delle (12) si deduce che:

$dF_t = dF_{t2} + dF_{t1} = 0$ (13)

Pertanto la forza risultante agisce solo in direzione ortogonale alla superficie dA.

Dalla seconda delle (12) si ricava:

$$\begin{aligned} dF_n &= dF_{n1} + dF_{n2} = -\frac{1}{2}\mu_2\left(H^2{}_{2n} - H^2{}_{2t}\right) dA = \\ &= \frac{1}{2}\mu_1\left(H^2{}_{1n} - H^2{}_{1t}\right) dA - \frac{1}{2}\mu_2 \left\{ \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(-H_{1n}\right)\right]^2 - H^2{}_{1t} \right\} dA = \\ &= \frac{1}{2}\left(\mu_1\left(H^2{}_{1n} - H^2{}_{1t}\right) - \frac{\mu^2{}_1}{\mu_2} H^2{}_{1n} + \mu_2 H^2{}_{1t} \right) dA = \frac{1}{2}\left[H^2{}_{1t}\left(\mu_2 - \mu_1\right) + H^2{}_{1n}\left(\mu_1 - \frac{\mu^2{}_1}{\mu_2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[H^2{}_{1t}\left(\mu_2 - \mu_1\right) + H^2{}_{1n}\mu_1\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\mu_2 - \mu_1\right)\left[H^2{}_{1t} + H^2{}_{1n}\frac{\mu_1}{\mu_2}\right] \end{aligned}$$

(13)

Si sottolinea come entrambe le componenti del campo all'interfaccia, H_t e H_n, intervengano nell'espressione della forza risultante (13).

Il segno di dF_n è concorde con la differenza μ_2-μ_1. E' quindi diretta dal materiale a permeabilità maggiore verso quello a permeabilità minore.