Teorema di Thevenin generalizzato

Si considerino due reti elettriche lineari, A e B, aventi rispettivamente N_A e N_B nodi interni. Esse si interfacciano attraverso n (n≥3) fili di collegamento, in cui scorrono le correnti I_{AB}.

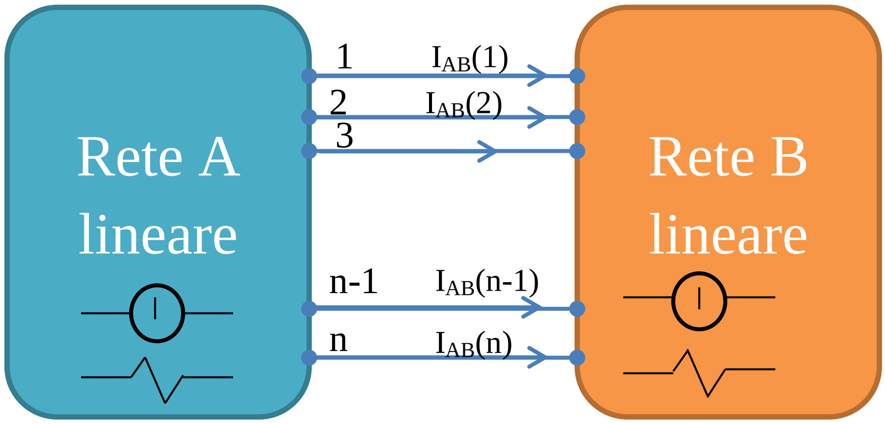


Figura 1

In primo luogo si risolva il problema quando i morsetti si collegamento sono aperti ($I_{AB}(i)=0$,   i=1…n).

Si applica il metodo dei potenziali di nodo alle due reti indipendenti:

$$G_A V_A = I_A \qquad N_A equazioni$$

$$G_B V_B = I_B \qquad N_B equazioni \tag{1}$$

G_A e G_B sono le matrici delle conduttanze di nodo delle due reti, aventi dimensioni (N_A,N_A) e (N_B,N_B).

V_A $(N_A,1)$ e V_B $(N_B,1)$ sono i vettori delle tensioni di nodo, ovvero le incognite del sistema.

I_A $(N_A,1)$ e I_B $(N_B,1)$ sono i vettori noti delle correnti impresse di nodo.

Si consideri ora il caso in cui le due reti sono collegate.

Le equazioni (1) dovranno essere corrette per considerare anche i valori $I_{AB}(i) \neq 0$:

$$G_A V_A + C_A I_{AB} = I_A \qquad N_A \; equazioni$$

(2)

$$G_B V_B - C_B I_{AB} = I_B \qquad N_B \; equazioni$$

C_A (N_A,n) e C_B (N_B,n) sono le matrici di incidenza delle due reti rispetto agli n lati di collegamento:

$$C_A(i,j) = 0 \; se \; il \; lato \; j \; non \; incide \; nel \; nodo \; i \; della \; rete \; A$$

$$C_A(i,j) = +1 \quad se \; la \; corrente \; I_{AB}(j) \; esce \; dal \; nodo \; i \; della \; rete \; A \qquad (3)$$

$$C_A(i,j) = -1 \quad se \; la \; corrente \; I_{AB}(j) \; entra \; nel \; nodo \; i \; della \; rete \; A$$

Dal momento che gli n nodi sono un sottoinsieme degli N_A nodi della rete A e degli N_B nodi della rete B, allora deve valere una legge di continuità per i potenziali negli n nodi:

$$C_A^T V_A = C_B^T V_B \qquad (4)$$

Si costruisce un unico sistema di equazioni, comprendente le (2) e le (4).

Le matrici si modificano nel seguente modo:

- Il vettore delle incognite

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ I_{AB} \end{bmatrix} \; di \; dimesione \; N_A + N_B + n$$

- Il vettore dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ 0 \end{bmatrix} \; di \; dimensione \; N_A + N_B + n$$

- La matrice a blocchi dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} G_A & 0 & C_A \\ 0 & G_B & -C_B \\ C_A^T & -C_B^T & 0 \end{bmatrix} \; di \; dimensione \; (N_A + N_B + n, N_A + N_B + n)$$

L'obiettivo consiste ora nel semplificare la risoluzione del sistema, sfruttandone la seguente proprietà: il numero dei fili di collegamento, e quindi degli n nodi, è molto inferiore rispetto al numero dei nodi delle due reti.

$$n \ll N_A \;\; e \; n \ll N_B \tag{5}$$

Si cerca un multipolo $\tilde{A}$ di $N_{\tilde{A}}$ nodi in sostituzione della rete A che sia equivalente ad essa ai morsetti di interfaccia, lasciando inalterata la rete B.

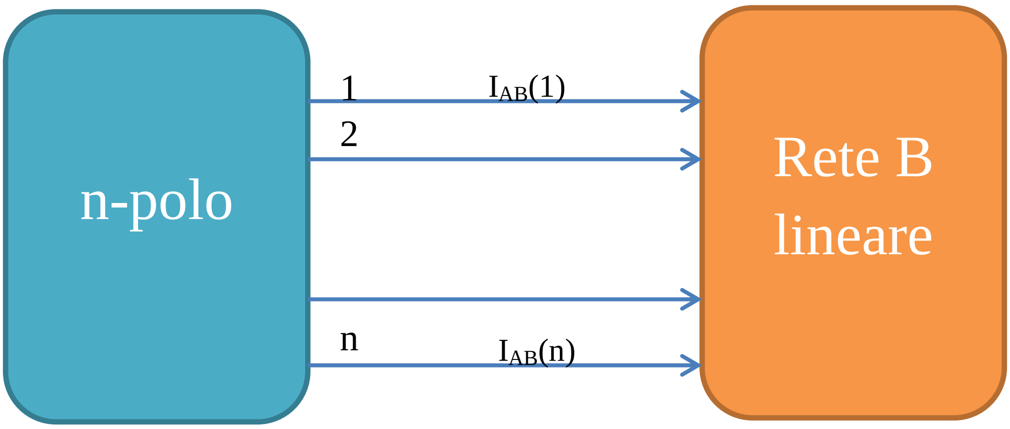
Sotto queste ipotesi le equazioni (2) e (4) diventano:

$$\begin{gathered} G_{\tilde{A}} V_{\tilde{A}} + C_{\tilde{A}} I_{AB} = I_{\tilde{A}} \qquad N_{\tilde{A}} \; equazioni \\ C_{\tilde{A}}^T V_{\tilde{A}} = C_B^T V_B \\ G_B V_B + C_B I_{AB} = I_B \qquad N_B \; equazioni \end{gathered} \tag{6}$$

Considerando che deve valere l'equivalenza ai morsetti di interfaccia, anche la seguente equazione deve essere verificata:

$$C_{\tilde{A}}^T V_{\tilde{A}} = C_A^T V_A \tag{7}$$

Il multipolo di ordine minimo avrà $N_{\tilde{A}} = n$ nodi, ovvero si suppone che il multipolo non abbia nodi interni.



In questo caso la matrice di incidenza $C_{\tilde{A}}$ coincide con la matrice identità (n,n):

$$C_{\tilde{A}} = U(n,n) = U_n \tag{8}$$

Il nuovo sistema di equazioni che si ottiene è il seguente:

$$\begin{bmatrix} G_{\tilde{A}} & 0 & C_{\tilde{A}} \\ 0 & G_B & -C_B \\ C_{\tilde{A}}^T & -C_B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\tilde{A}} \\ V_{\tilde{B}} \\ I_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\tilde{A}} \\ I_B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Le incognite sono diventate $N_B + 2n$, meno rispetto al caso precedente perché valgono le disuguaglianze (5).

Il problema consiste nel definire la matrice $G_{\tilde{A}}$ e il vettore $I_{\tilde{A}}$ relativi al multipolo.

Si sviluppi la prima equazione del sistema (9), sfruttando la (7):

$$V_{\tilde{A}} = G_{\tilde{A}}^{-1}(I_{\tilde{A}} - C_{\tilde{A}} I_{AB}) = G_{\tilde{A}}^{-1} I_{\tilde{A}} - G_{\tilde{A}}^{-1} C_{\tilde{A}} I_{AB} = C_A^T V_A$$

Si sfrutti ora la prima delle (2) in cui si è esplicitato V_A:

$$V_A = G_A^{-1}(I_A - C_A I_{AB})$$

Si ottiene:

$$G_{\tilde{A}}^{-1} I_{\tilde{A}} - G_{\tilde{A}}^{-1} C_{\tilde{A}} I_{AB} = C_A^T G_A^{-1} I_A - C_A^T G_A^{-1} C_A I_{AB} \tag{10}$$

In questa equazione si separano i termini contenenti le correnti I_{AB}:

$$\begin{cases} G_{\tilde{A}}^{-1} C_{\tilde{A}} I_{AB} = C_A^T G_A^{-1} C_A I_{AB} \\ G_{\tilde{A}}^{-1} I_{\tilde{A}} = C_A^T G_A^{-1} I_A \end{cases} \tag{11}$$

Ricordando che $C_{\tilde{A}} = U_n$, dalla prima espressione si arriva a questo risultato:

$$G_{\tilde{A}} = (C_A^T G_A^{-1} C_A)^{-1} \tag{12}$$

Di conseguenza si ricava anche l'altra incognita:

$$I_{\tilde{A}} = G_{\tilde{A}} C_A^T G_A^{-1} I_A \tag{13}$$

Assumendo (12) e (13), il sistema (9) è risolvibile.

In questo modo la rete A è stata sostituita da un multipolo equivalente, rappresentato dalla due matrici $G_{\tilde{A}}$ e $I_{\tilde{A}}$.

Tuttavia, il problema che si pone ora è di tipo computazionale e riguarda il calcolo dell'inversa della matrice G_A in (12) e (13). Dal momento che si vuole evitare il calcolo esplicito dell'inversa, si può seguire il procedimento seguente.

Primo passo: morsetti aperti

Per prima cosa si valuti il sistema originario (2) quando gli n morsetti di interfaccia non sono collegati.

Questo significa forzare la condizione $I_{AB}(i) = 0 \qquad i = 1, \dots n$

Si ottiene:

$$G_A V_A = I_A$$

Allora, formalmente, si ha :

$$G_A^{-1} I_A = V_A|_{I_{AB}=0} \tag{14}$$

In pratica il sistema si risolve per fattorizzazione della matrice G_A.

La (14) si sostituisce nella (13) per ricavare la corrente $I_{\tilde{A}}$, una volta che sia nota $G_{\tilde{A}}$.

Secondo passo: rete A resa passiva

Per ottenere l'inversa della matrice delle conduttanze per la rete A, si annullano le forzanti I_A e si impongono le correnti dei fili di collegamento. In particolare, si lasciano n-1 morsetti aperti e si forza una corrente unitaria nel filo restante (fig.2)

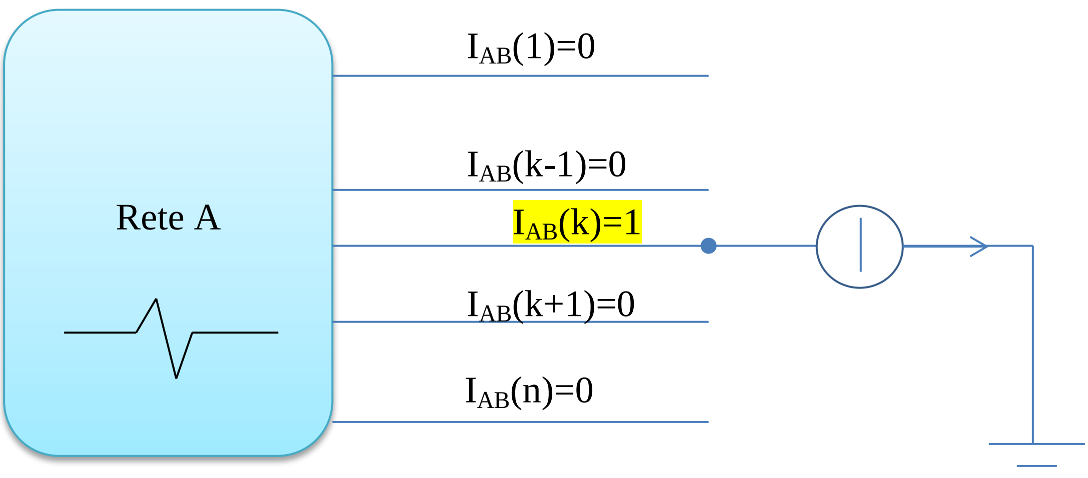


Figura 2

Questo procedimento deve essere iterato per tutti i morsetti di interfaccia:

$$\begin{cases} I_{AB}(k) = 1 \\ I_{AB}(i \neq k) = 0 \\ k = 1, \dots n \end{cases} \tag{15}$$

Ad ogni iterazione, risolvendo la prima delle equazioni (2), si ottiene un vettore V_A.

Si uniscano i vettori colonna delle correnti impresse I_{AB} in una matrice che, come si deduce dalle (15), è la matrice identità:

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti, alla prima iterazione si ha:

$$I_{AB}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dato che tutte le correnti sono nulle tranne quella nel primo filo di interfaccia.

Se si fa lo stesso con i corrispondenti vettori soluzione $V_A(i)$ si ottiene una matrice $\tilde{V}_A$.

Ma allora, ricordando la (2), ottiene:

$$G_A^{-1} C_A I_{AB} = -V_A$$

$$\tilde{V}_A = -G_A^{-1} C_A U_n = -G_A^{-1} C_A \tag{16}$$

Questo risultato può quindi essere sostituito nella (12), ricavando la matrice mancante:

$$G_{\tilde{A}} = \left(C_A^T \tilde{V}_A \right)^{-1} \tag{17}$$

Questa resta l’unica inversa da calcolare, essa è però ha dimensione relativamente ridotta, (n,n), quindi è facile calcolarla.

In una procedura di ottimizzazione basata su un’analisi di campo, si può suddividere la regione oggetto di studio in due parti (corrispettivi delle reti A e B) che comunicano tramite n nodi (corrispondenti agli n morsetti). Un’analisi ripetuta può essere limitata ad una sola sottoregione, in cui sono circoscritte le variabili del problema di ottimo. Le matrici delle conduttanze di nodo saranno sostituite dalle corrispondenti matrici di rigidezza di un’analisi ad elementi finiti.

Calcolo di V_B

Si voglia ottenere un'espressione analitica per il vettore delle tensioni di nodo per la rete B. Anche ora, si vuole evitare di calcolare l'inversa della matrice delle conduttanze. Infatti, il calcolo dell'inversa ha un elevato costo computazionale e può introdurre errori di approssimazione inaccettabili.

Si usa la seconda delle equazioni (2) e la prima delle equazioni (6)

$$G_B V_B = C_B I_{AB} + I_B$$

$$G_{\tilde{A}} V_{\tilde{A}} = I_{\tilde{A}} - I_{AB}$$

La matrice $C_{\tilde{A}}$ non compare più esplicitamente perché si è applicata la condizione (8).

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$G_B V_B = C_B (I_{\tilde{A}} - G_{\tilde{A}} V_{\tilde{A}}) + I_B$$

Ricordando che vale la continuità delle tensioni ai morsetti di collegamento ($V_{\tilde{A}} = C_B^T V_B$), si può scrivere:

$$G_B V_B = C_B (I_{\tilde{A}} - G_{\tilde{A}} C_B^T V_B) + I_B$$

Da cui risulta:

$$(G_B + C_B G_{\tilde{A}} C_B^T) V_B = I_B + C_B I_{\tilde{A}} \tag{18}$$

Il secondo addendo del coefficiente moltiplicativo di V_B e del termine noto possono essere considerati come "termini di correzione" introdotti dal multipolo di Thevenin che sostituisce la rete A.

La matrice G_A è sparsa mentre la matrice $G_{\tilde{A}}$ è piena. Questo significa che l'occupazione in memoria sarà maggiore. Allo stesso tempo il numero di condizionamento della seconda matrice è maggiore di quello della prima.

Tuttavia $G_{\tilde{A}}$ e $I_{\tilde{A}}$ vengono calcolate una sola volta e quindi la semplificazione dovuta al ridotto numero di incognite (da N_A+N_B a $2n+N_B$) compensano questi svantaggi, particolarmente nell'ambito di analisi ripetute.