Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

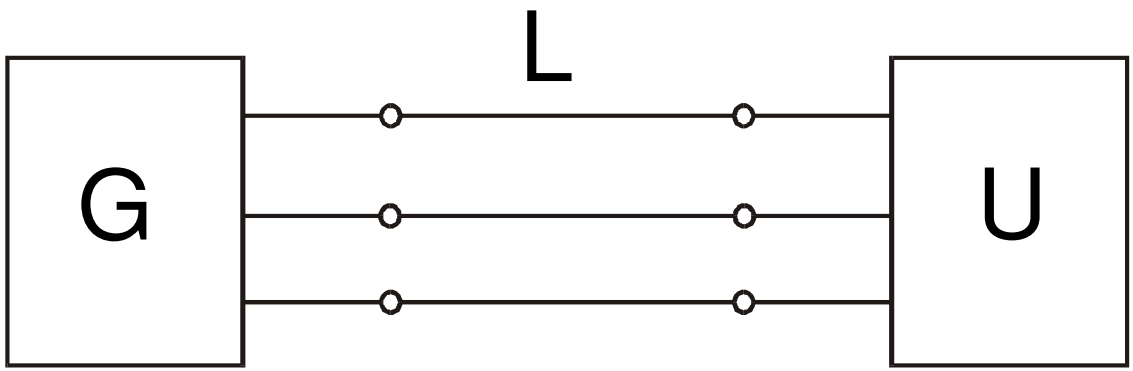
Corso di Principi e Applicazioni di Elettrotecnica

Circuiti trifasi

Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione www.unipv.it/electric/cad

Circuiti trifasi

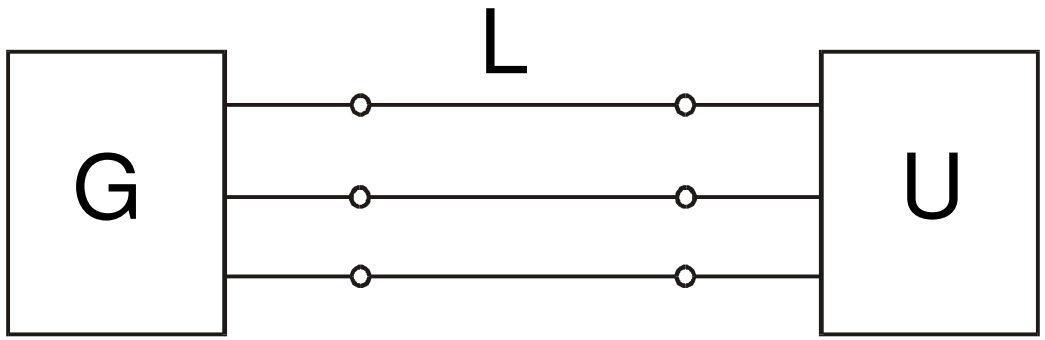
Nelle applicazioni di potenza è frequente trovare, in regime PAS, dispositivi a tre morsetti e linee a tre conduttori



Costituiscono una soluzione razionale per convertire, trasmettere, utilizzare potenza elettrica.

Circuiti trifasi

I generatori (alternatori) sono costruttivamente compatti.

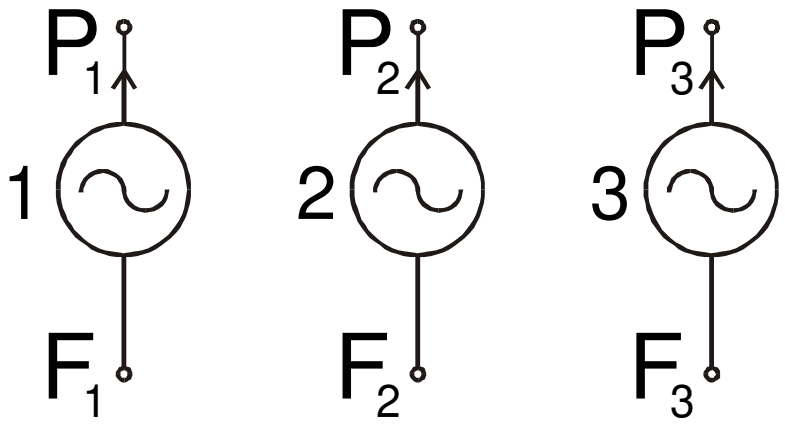


Le linee sono più economiche (minor peso) a pari potenze dissipata e trasportata dalla linea.

Gli utilizzatori (motori asincroni) sono affidabili e autoavvianti.

GENERATORE TRIFASE LINEARE DI TENSIONE O DI CORRENTE

Dispositivo a tre morsetti ottenuto da tre generatori monofasi ideali, tali che

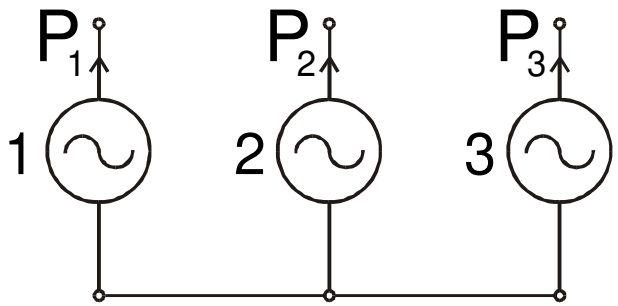


$a_1+a_2+a_3 = 0$ KL

(a_i corrente o tensione impressa)

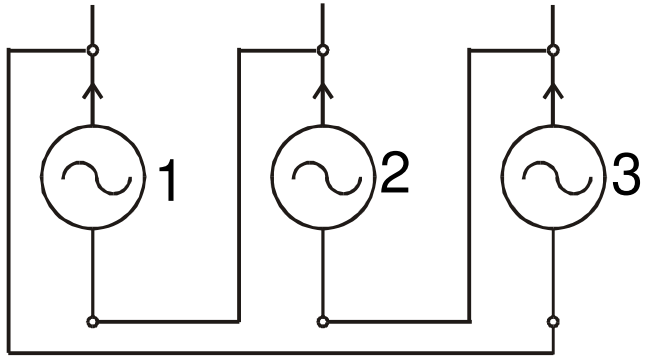
Circuiti trifasi

CONNESSI A STELLA (Y)

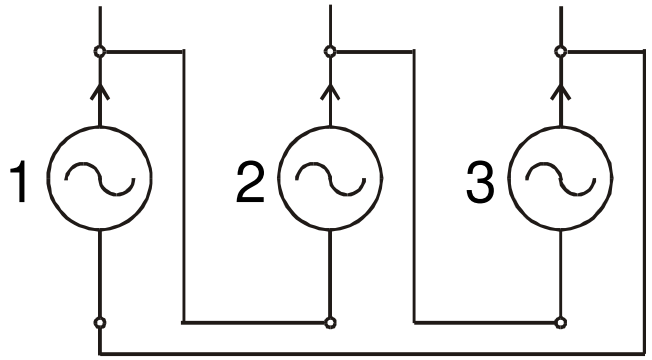


$$F_1 \equiv F_2 \equiv F_3$$

CONNESSI A TRIANGOLO (Δ)



$$F_1 \equiv P_2 \quad F_2 \equiv P_3 \quad F_3 \equiv P_1$$

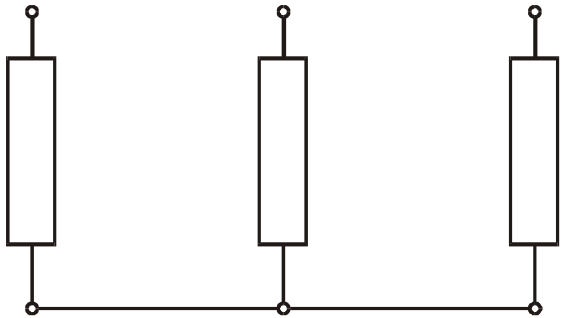


$$P_1 \equiv F_2 \quad P_2 \equiv F_3 \quad P_3 \equiv F_1$$

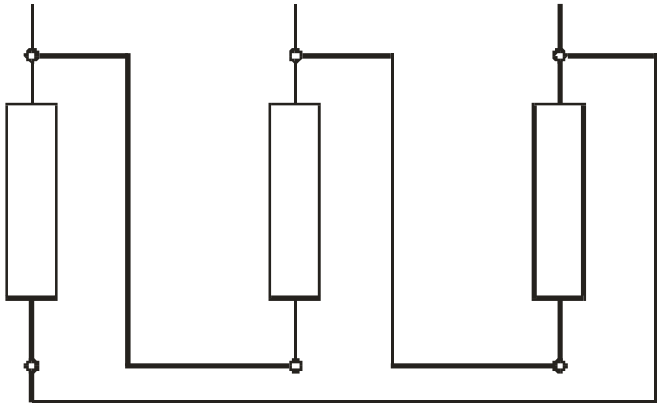
Circuiti trifasi

UTILIZZATORE TRIFASE PASSIVO

Dispositivo a tre morsetti ottenuto da tre utilizzatori monofasi passivi, collegati a stella

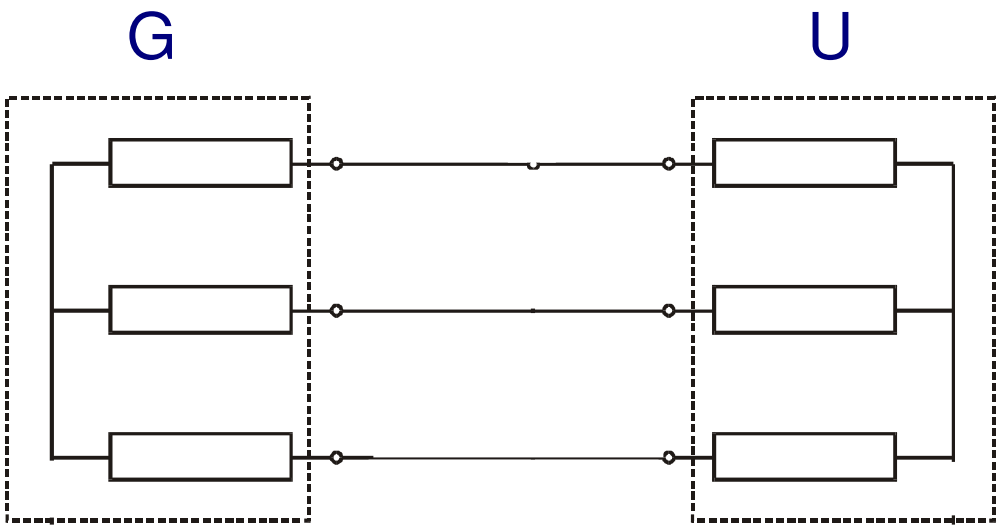


oppure a triangolo



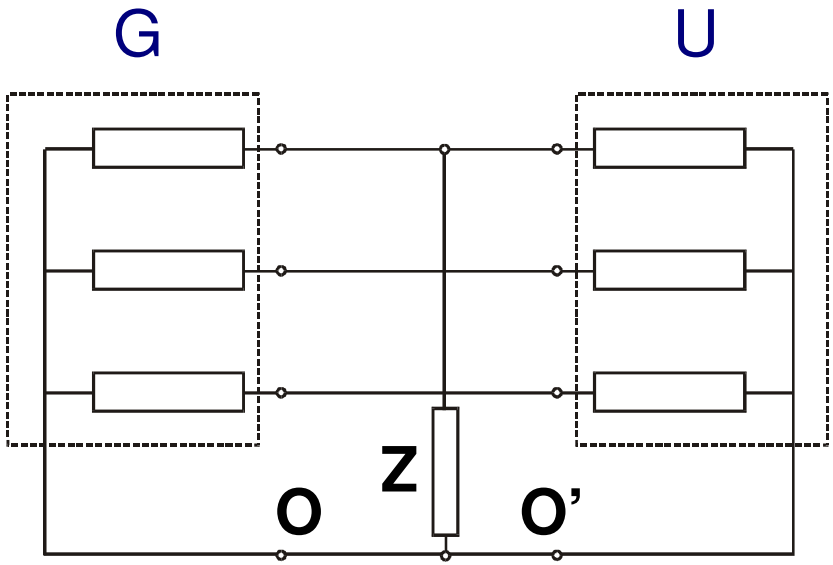
Circuiti trifasi

Connettendo dispositivi a tre morsetti mediante linea a tre conduttori si ottiene un circuito trifase.



Circuiti trifasi

Si realizzano anche linee, dispositivi, circuiti trifasi a quattro conduttori



(conduttore) neutro

Il neutro consente di collegare alla linea trifase carichi monofasi **Z**

(U industriale, Z civile)

O,O' centri stella

(O teorico, O' reale)

SISTEMI TRIFASI

Un sistema trifase è costituito da tre grandezze elettriche (tensione o corrente) P.A.S. isofrequenziali

$$a_1(t) \quad a_2(t) \quad a_3(t)$$

tali che

$$a_1(t)+a_2(t)+a_3(t)=0$$

Un sistema trifase si dice **simmetrico** (se di tensione) o **equilibrato** (se di corrente) se è costituito da tre generatori P.A.S. di uguale frequenza, uguale valore efficace, uguale sfasamento relativo ($2\pi/3$ rad, 120 deg)

SISTEMI TRIFASI

Il sistema è a **senso ciclico diretto** se a_2 è in ritardo su a_1 e così via

Il sistema è a **senso ciclico inverso** se a_2 è in anticipo su a_1 e così via

Rappresentazione analitica nel dominio del tempo

$$a_1(t)=A_M\cos(\omega t+\varphi)$$

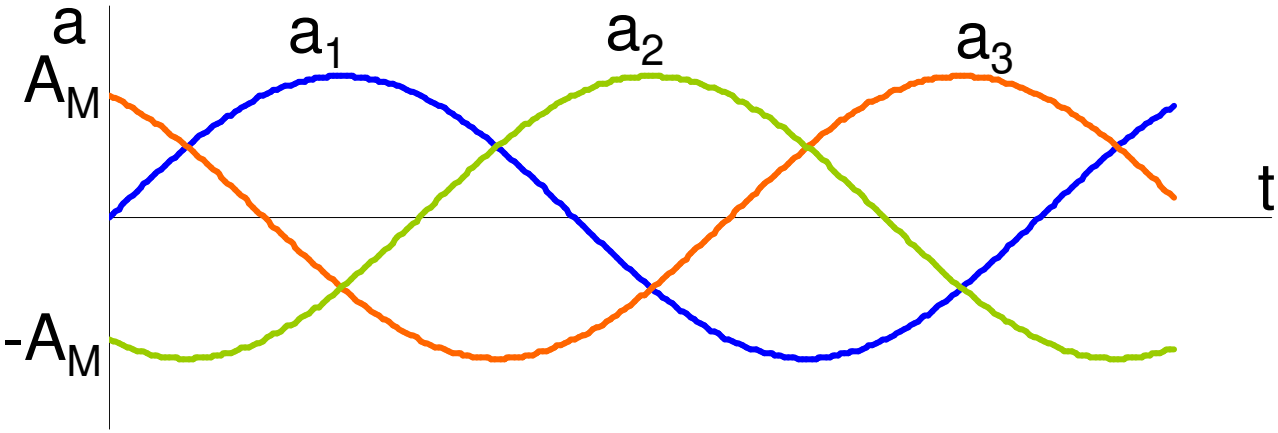
$$a_2(t)=A_M\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$a_3(t)=A_M\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{4}{3}\pi\right)$$

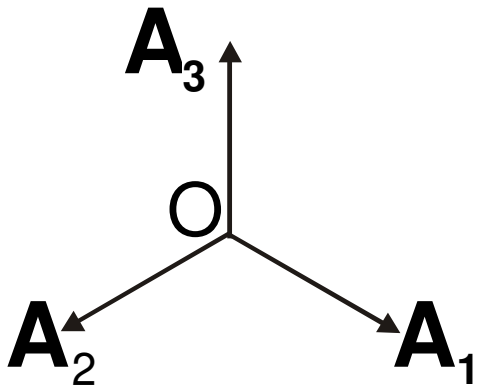
Sistema trifase simmetrico (o equilibrato) a senso ciclico diretto

Circuiti trifasi

Rappresentazione grafica (dominio del tempo)



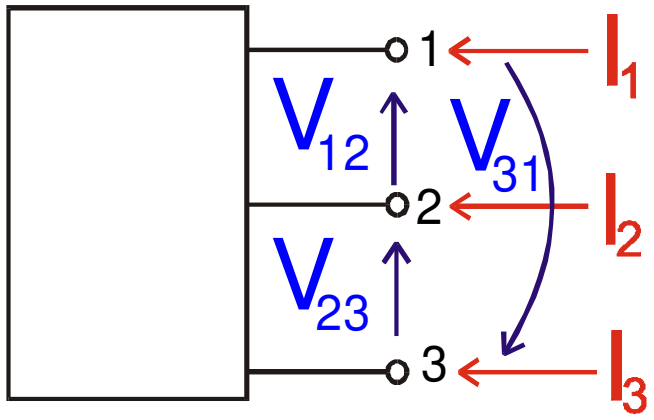
Rappresentazione grafica (dominio dei fasori)



$$A_1+A_2+A_3=0$$

Circuiti trifasi

Si considerino tensioni e correnti di un dispositivo trifase in regime P.A.S.



$V_{12}+V_{23}+V_{31}=0$

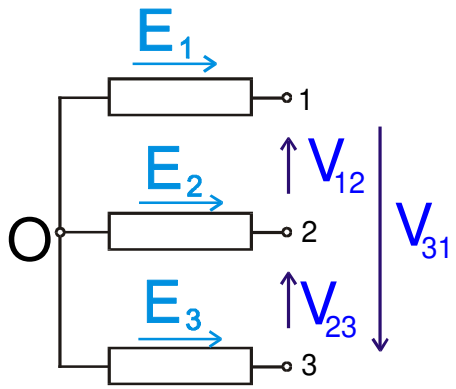
$I_1+I_2+I_3=0$

$V_{12}+V_{23}+V_{31}=0$ Tensioni di linea (o concatenate)

$I_1+I_2+I_3=0$ Correnti di linea

Circuiti trifasi

Se internamente il dispositivo è collegato a stella, possiamo individuare le **tensioni di fase E_1, E_2, E_3**



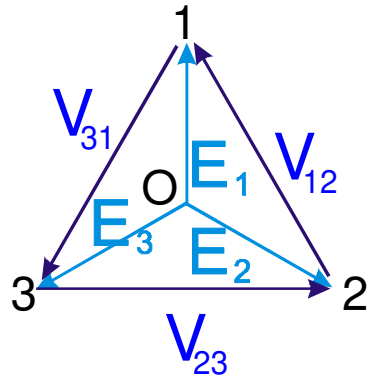
$$V_{12}=E_1-E_2$$

$$V_{23}=E_2-E_3$$

$$V_{31}=E_3-E_1$$

V simmetrico, I equilibrato ⟶ E simmetrico ($E_{1M}=E_{2M}=E_{3M}$)

E si può ricavare da V vettorialmente o analiticamente

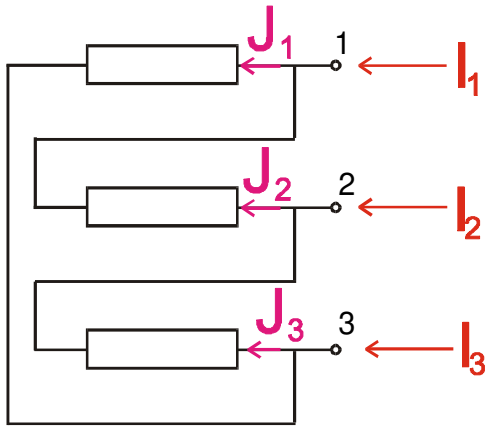


Si trova, per i valori efficaci:

$$V = 2E\cos\frac{\pi}{6} = 2E\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}E$$

Circuiti trifasi

Se internamente il dispositivo è collegato a triangolo, possiamo individuare le **correnti di fase J_1, J_2, J_3**

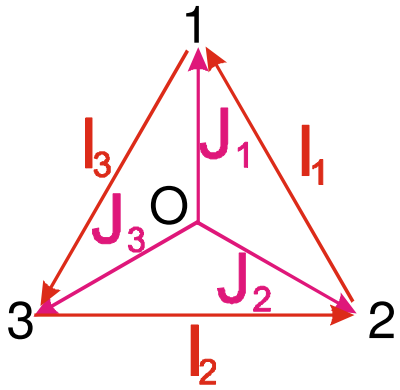


$$I_1 = J_1 - J_2$$

$$I_2 = J_2 - J_3$$

$$I_3 = J_3 - J_1$$

I equilibrato, V simmetrico ⟶ J equilibrato ($J_{1M}=J_{2M}=J_{3M}$)



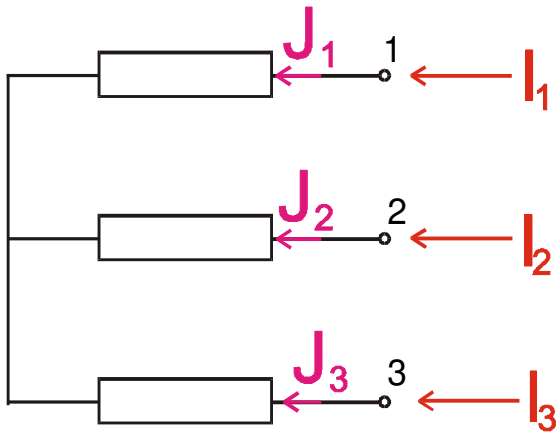
Risulta

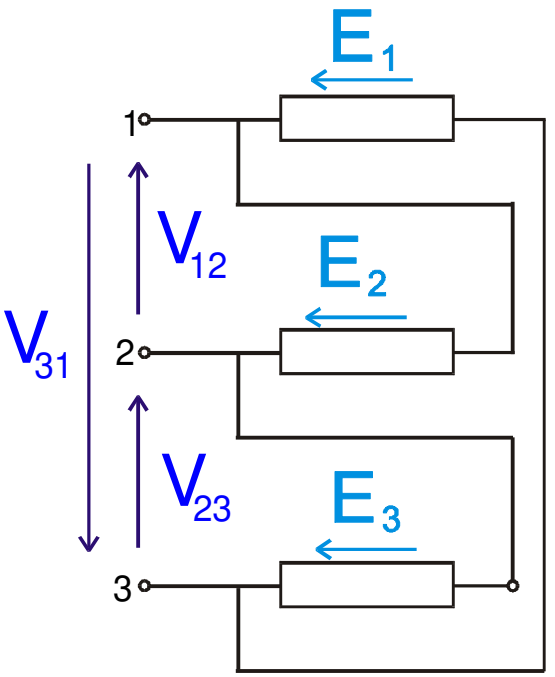
$$I = \sqrt{3}J$$

per i valori efficaci

Circuiti trifasi

- Nel collegamento a stella si possono introdurre correnti di fase J=I
- Nel collegamento a triangolo si possono introdurre tensioni di fase E=V





POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE

Siano: (V,E) tensioni di linea e di fase simmetriche

(I,J) correnti di linea e di fase equilibrate

Sia φ l'angolo di sfasamento tra E ed J

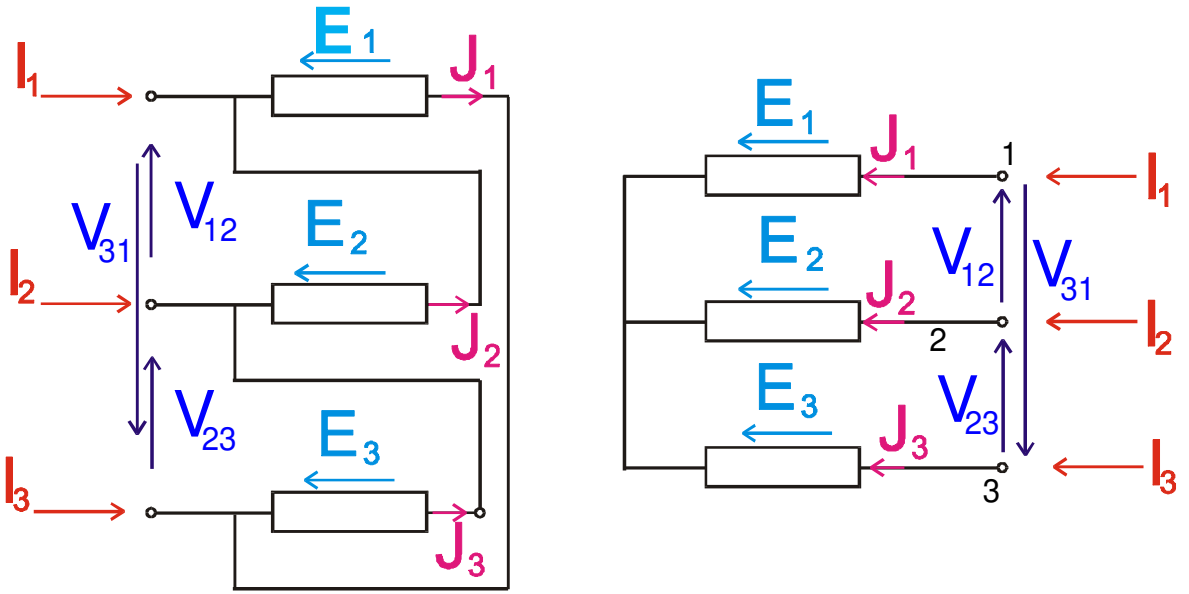
Assumendo la convenzione di segno degli utilizzatori, pensando il dispositivo trifase ottenuto da tre dispositivi monofasi, le potenze totali assorbite risultano:

$P = 3EJ\cos\varphi$	$Q = 3EJ\sin\varphi$	$A = 3EJ$
attiva	reattiva	apparente

Circuiti trifasi

- Se il dispositivo è collegato a **stella** ($V = \sqrt{3}E$, $I = J$)

$$P = \sqrt{3}\sqrt{3}EJ\cos\varphi = \sqrt{3}VI\cos\varphi \qquad Q = \sqrt{3}VI\sin\varphi \qquad A = \sqrt{3}VI$$



- Se il dispositivo è collegato a **triangolo** ($V = E$, $I = \sqrt{3}J$)

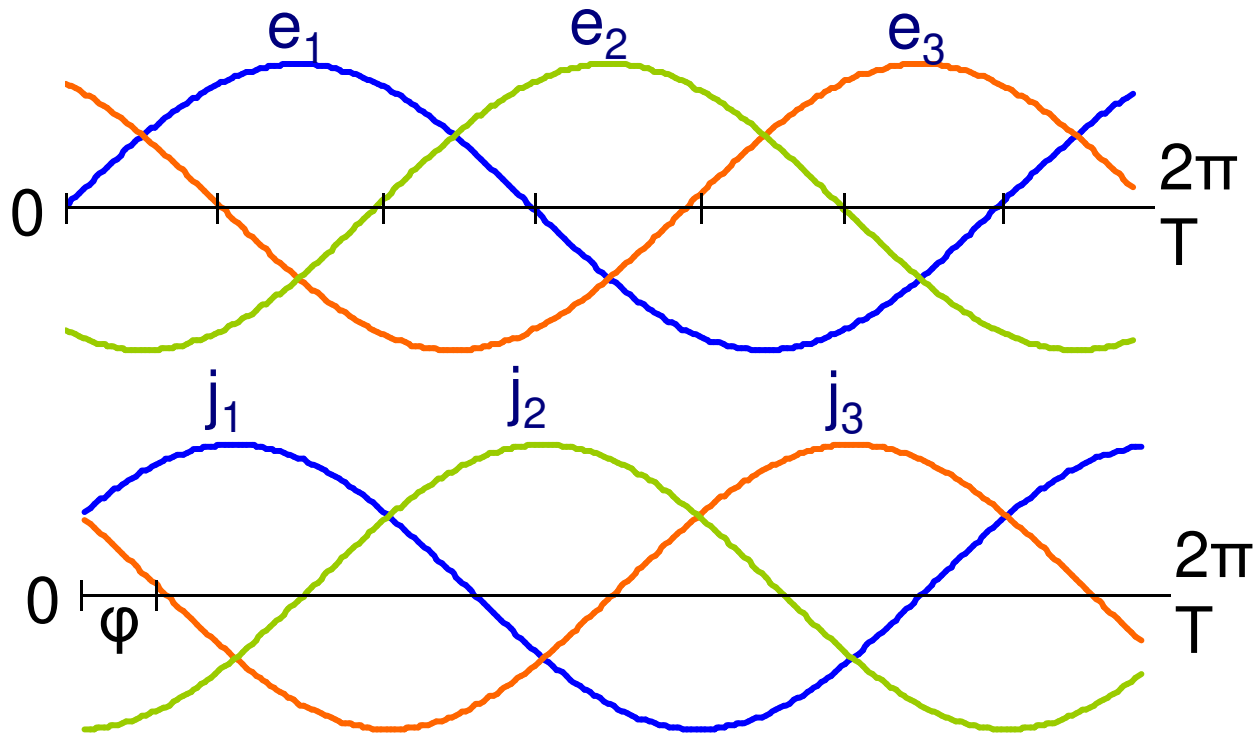
$$P = \sqrt{3}\sqrt{3}EJ\cos\varphi = \sqrt{3}VI\cos\varphi \qquad Q = \sqrt{3}VI\sin\varphi \qquad A = \sqrt{3}VI$$

POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE LINEARE

e_1, e_2, e_3 sistema simmetrico

j_1, j_2, j_3 sistema equilibrato

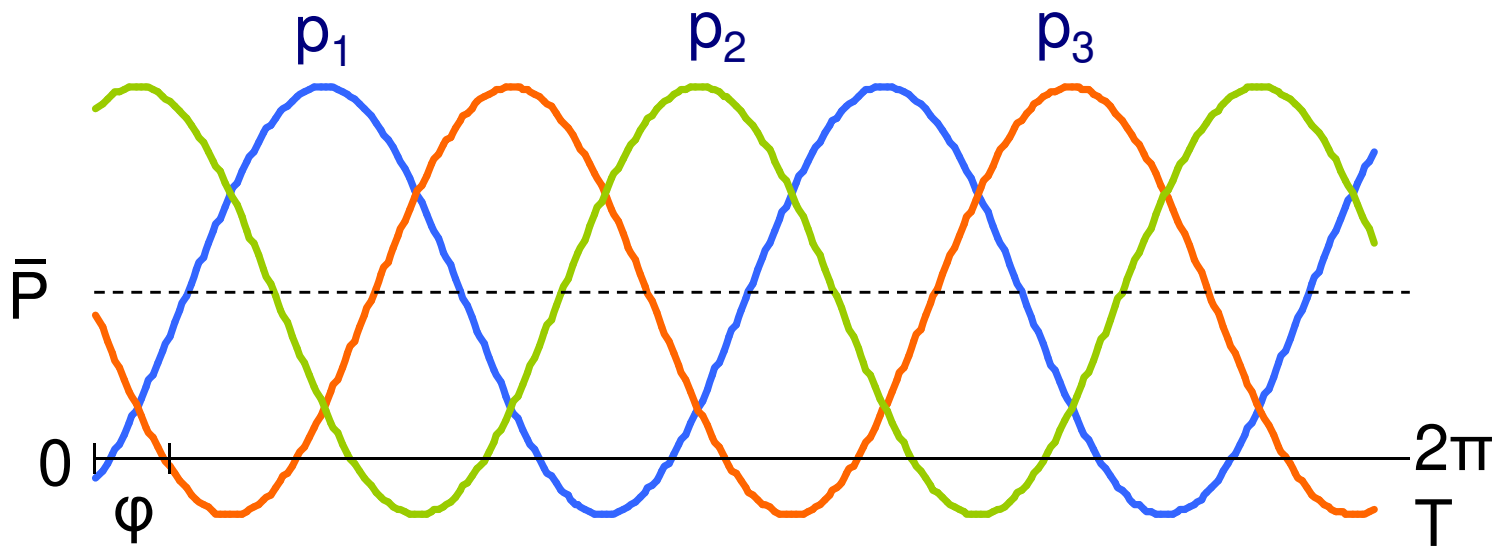
periodo T



POTENZA DI UN DISPOSITIVO TRIFASE LINEARE

$p_1=e_1j_1$ $p_2=e_2j_2$ $p_3=e_3j_3$

CONVENZIONE UTILIZZATORI



Rispetto al valore medio P $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=0$

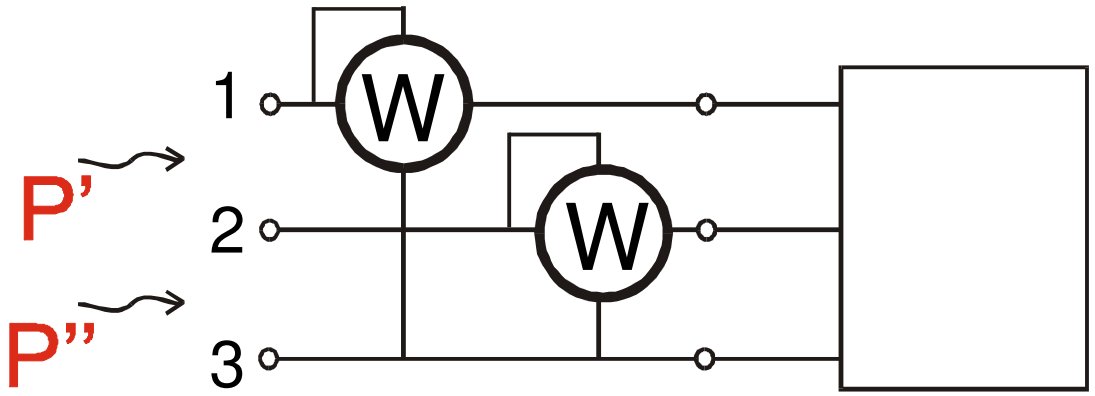
Rispetto allo zero $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t) = 3P = 3EJ\cos\varphi$

LA POTENZA ISTANTANEA E' COSTANTE NEL TEMPO

MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

Si può fare con 2 wattmetri attraversati da correnti di 2 fasi e soggetti alle tensioni delle 2 fasi rispetto alla terza

INSERZIONE ARON



MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

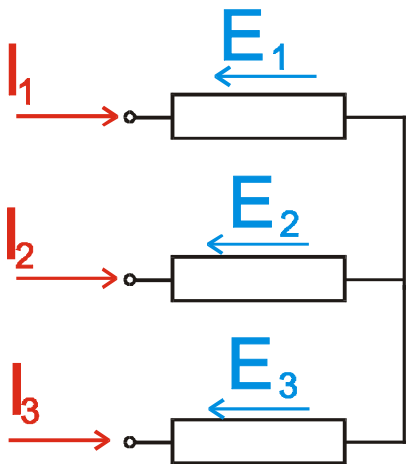
La somma algebrica delle misure dei due wattmetri:

$$P'+P''=\mathrm{Re}\left\{V_{13}I_1^*+V_{23}I_2^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{(E_1-E_3)I_1^*+(E_2-E_3)I_2^*\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{E_1I_1^*+E_2I_2^*+E_3\left(-I_1^*-I_2^*\right)\right\}=\mathrm{Re}\left\{E_1I_1^*+E_2I_2^*+E_3I_3^*\right\}$$

$$=P_1+P_2+P_3=P$$

Collegamento a Y



MISURA DI POTENZA ATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI QUALSIASI

ovvero

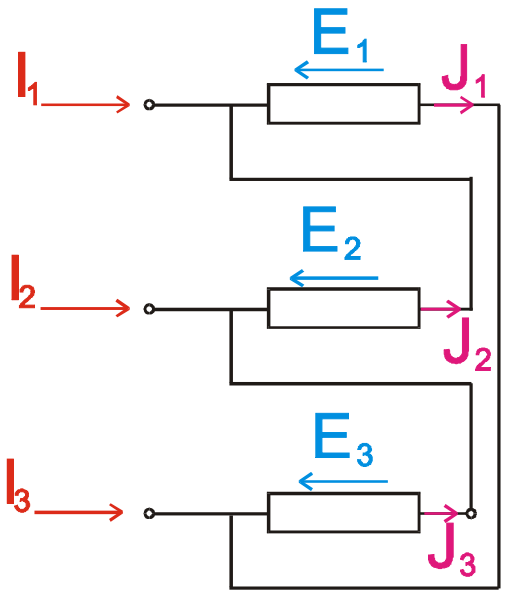
$$P'+P''=\mathrm{Re}\left\{V_{13}I_1^*+V_{23}I_2^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{E_1\left(J_1-J_2\right)^*-E_3\left(J_2-J_3\right)^*\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{E_1J_1^*+E_3J_3^*+\left(-E_1-E_3\right)J_2^*\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{E_1J_1^*+E_3J_3^*+E_2J_2^*\right\}=$$

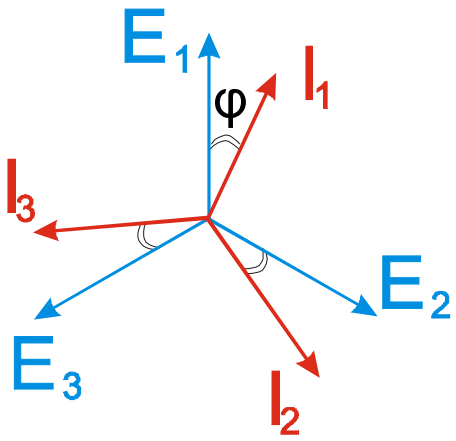
$$=P_1+P_2+P_3=P$$

Collegamento a Δ



MISURA DI POTENZA ATTIVA E REATTIVA IN UN CIRCUITO TRIFASE A 3 CONDUTTORI

Se il sistema è simmetrico (V) ed equilibrato (I)



fase di $V_{13} = \frac{\pi}{3}$ fase di $I_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$

fase di $V_{23} = 0$ fase di $I_2 = -\frac{\pi}{6} - \varphi$

$$P' = \mathrm{Re}\{V_{13} I_1^*\} = VI\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$P'' = \mathrm{Re}\{V_{23} I_2^*\} = VI\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Circuiti trifasi

Inoltre, se il sistema è simmetrico (V) ed equilibrato (I)

$$P'+P'' = VI\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\right) +$$

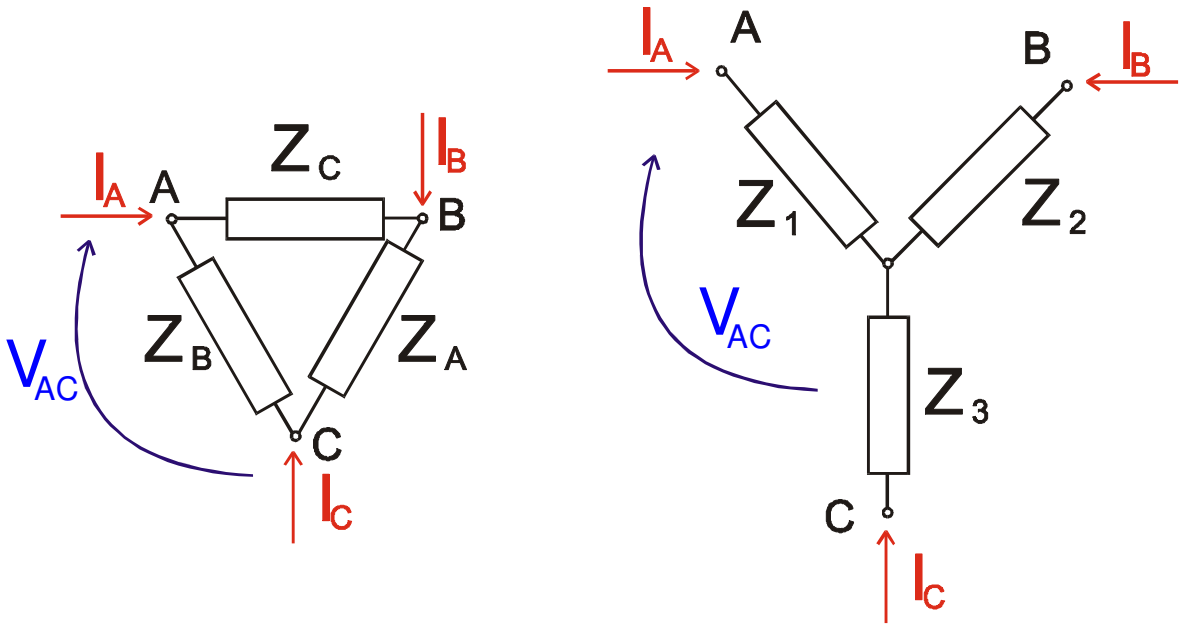
$$+ VI\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\right) =$$

$$= \sqrt{3}VI\cos\varphi = P \qquad \text{(se } \varphi=0 \text{ allora P'=P'')}$$

$$P'-P'' = VI\sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} P = P'+P'' \\ Q = \sqrt{3}(P'-P'') \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA



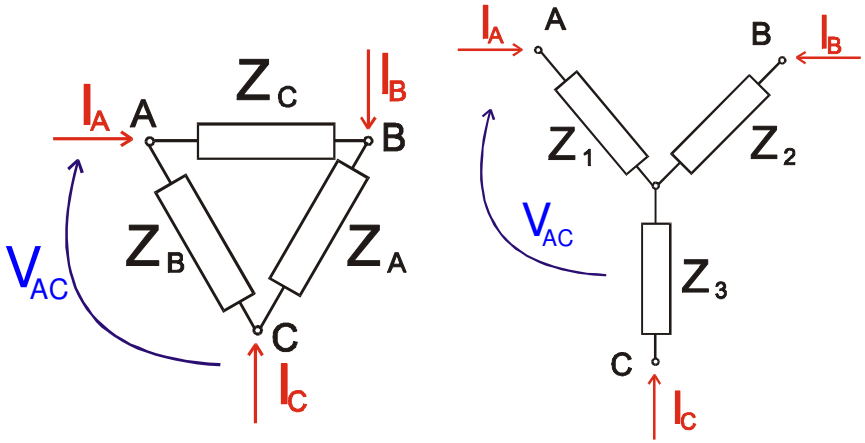
$$I_B \equiv 0 \longrightarrow -I_C = I_A = \frac{V_{AC}}{\frac{Z_B(Z_A + Z_C)}{(Z_A + Z_B + Z_C)}}$$ **triangolo**

$$I_A = \frac{V_{AC}}{Z_1 + Z_3}$$ **stella**

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA

Per l'uguaglianza delle correnti al nodo A

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_A Z_B + Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

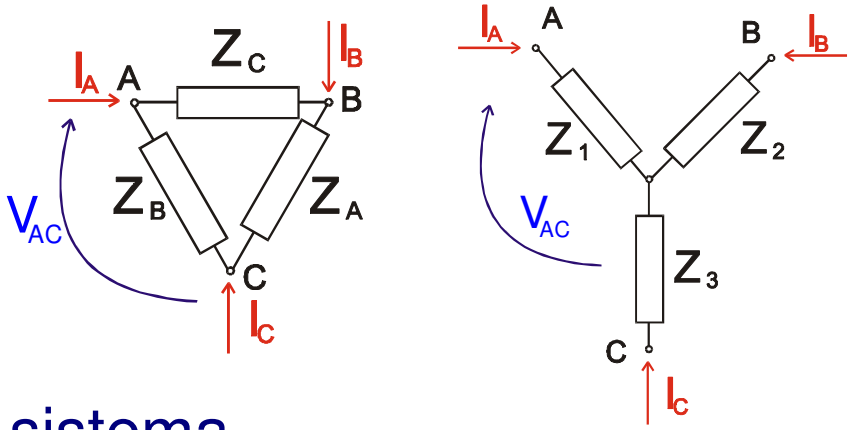


Imponendo l'uguaglianza delle correnti anche ai nodi B,C

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \qquad Z_1 + Z_2 = \frac{Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Circuiti trifasi

TRASFORMAZIONE TRIANGOLO - STELLA



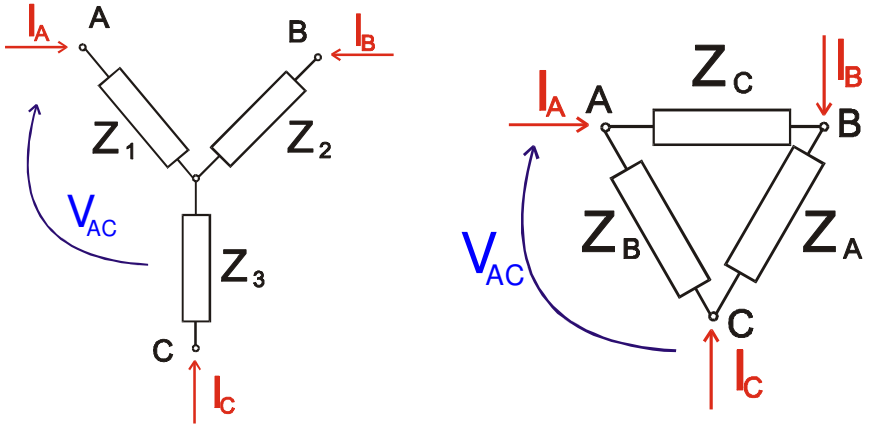
Risolvendo il sistema

$$Z_1 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \qquad Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \qquad Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Caso equilibrato $Z_A = Z_B = Z_C = Z$

$$\rightarrow \quad Z_1 = Z_2 = Z_3 = \frac{1}{3} Z$$

TRASFORMAZIONE STELLA - TRIANGOLO



Procedendo inversamente, si ottiene la trasformazione **stella - triangolo**

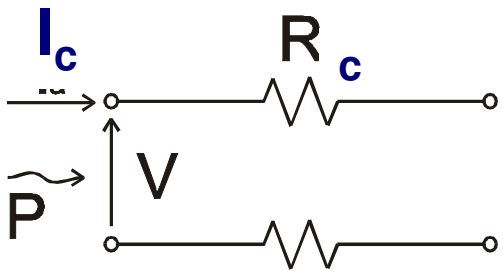
$$Z_A = Z_2 Z_3 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \qquad Z_B = Z_1 Z_3 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)$$

$$Z_C = Z_1 Z_2 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)$$

Caso equilibrato

$$Z_A = Z_B = Z_C = 3Z$$

LINEA IN CORRENTE CONTINUA



$$R_c = \rho \frac{\ell}{s_c}$$

Resistività del rame
a temperatura ambiente
ρ = 0.017 Ω mm² / m

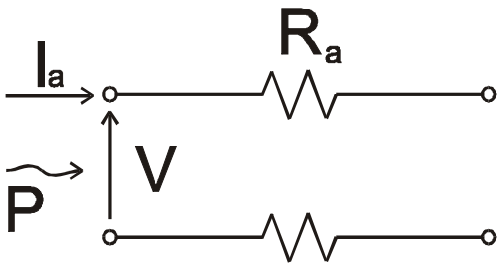
$$P_c = VI_c$$

Potenza trasmessa

$$P_{dc} = 2R_c I_c^{\,2} = 2R_c \frac{P^2}{V^2} = 2\rho \frac{\ell}{s_c} \frac{P^2}{V^2}$$

Potenza dissipata

LINEA IN C.A. MONOFASE



$$R_a = \rho \frac{\ell}{s_a}$$

Resistività del rame
a temperatura ambiente
ρ = 0.017 Ω mm² / m

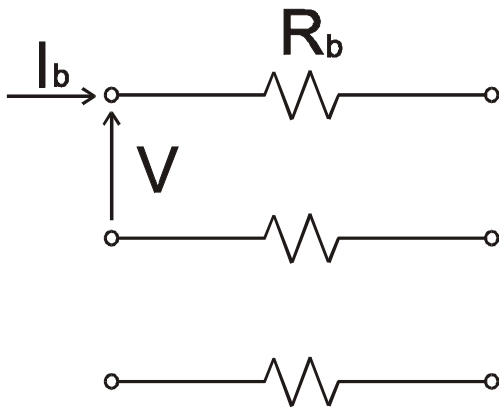
$$P_a = VI_a \cos\varphi$$

Potenza trasmessa

$$P_{da} = 2R_a \frac{P^2}{V^2 \cos^2\varphi} = 2\rho \frac{\ell}{s_a} \frac{P^2}{V^2 \cos^2\varphi}$$

Potenza dissipata

LINEA IN C.A. TRIFASE



$$R_b = \rho \frac{\ell}{s_b}$$

Resistività del rame
a temperatura ambiente
ρ = 0.017 Ω mm² / m

$$P_b = \sqrt{3} V I_b \cos\varphi$$

Potenza trasmessa

$$P_{db} = 3 R_b I_b^{\,2} = 3\rho \frac{\ell}{s_b} I_b^{\,2} = 3\rho \frac{\ell}{s_b} \frac{P^2}{3V^2 \cos^2\varphi}$$

Potenza dissipata

CONFRONTO LINEA C.C. – LINEA C.A. TRIFASE

$$P_{dc} = P_{db}$$

$$2\rho\frac{\ell}{s_c}\frac{P^2}{V^2} = \rho\frac{\ell}{s_b}\frac{P^2}{V^2\cos^2\varphi}$$

$$s_c = 2s_b\cos^2\varphi$$

Sezione complessiva linea in c.c.

$$S_c = 2s_c = 4s_b\cos^2\varphi = 4\frac{3s_b}{3}\cos^2\varphi = 4\frac{S_b}{3}\cos^2\varphi$$

$$S_c < S_b \Leftrightarrow \cos\varphi < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

CONFRONTO LINEA MONOFASE – LINEA TRIFASE

$$P_{da} = P_{db}$$

$$2\rho\frac{\ell}{s_a}\frac{P^2}{V^2\cos^2\varphi} = \rho\frac{\ell}{s_b}\frac{P^2}{V^2\cos^2\varphi}$$

$$s_b = \frac{s_a}{2}$$

Sezione complessiva linea trifase

$$S_b = 3s_c = \frac{3}{2}s_a = \frac{3}{2}\frac{2s_a}{2} = \frac{3}{4}S_a < S_a$$

per qualunque valore del cos ϕ

CONFRONTO LINEE: RIEPILOGO

Confronto di prestazioni a pari:

- tensione di linea **V**
- lunghezza linea ℓ
- potenza dissipata $\mathbf{P_d}$
- potenza trasmessa **P**

Con riferimento alle perdite di linea, la trasmissione:

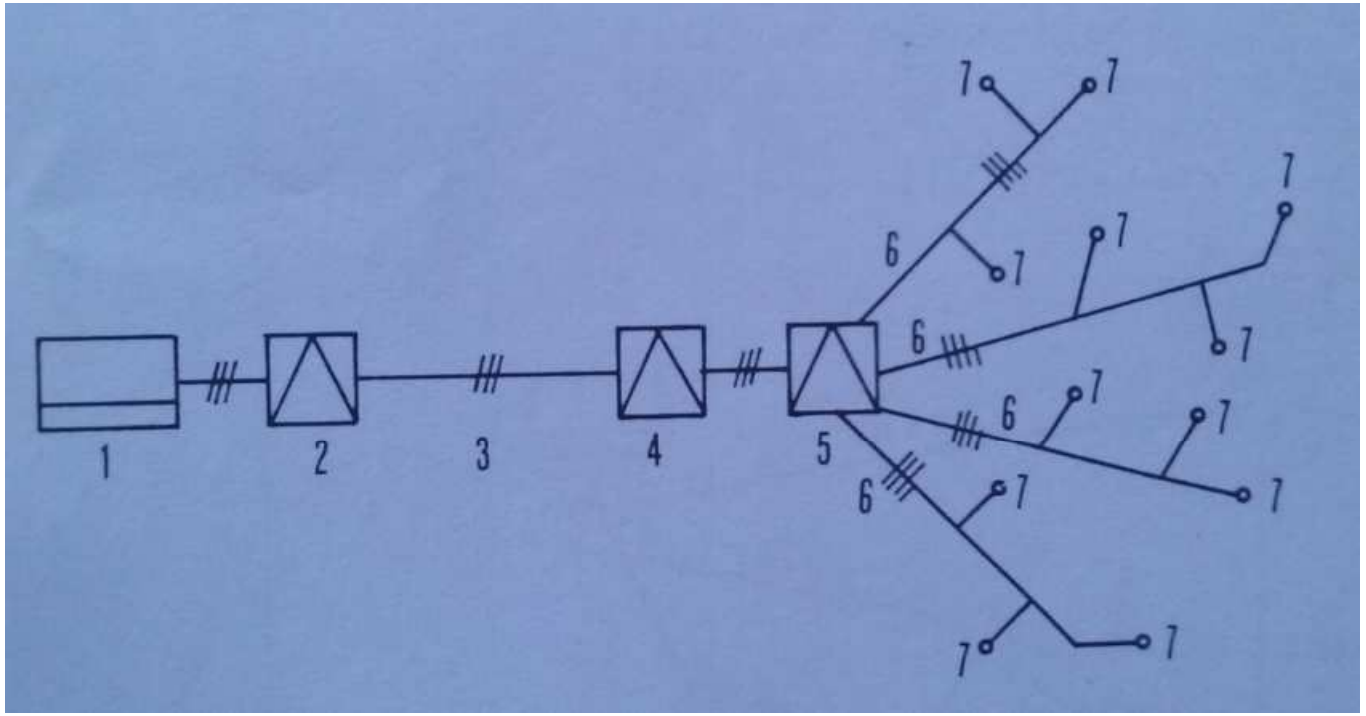
- in c.c. è preferibile a quella in c.a. trifase

- in c.a. trifase è preferibile a quella in c.a. monofase

consentendo un vantaggio economico (minor peso dei conduttori) a parità di prestazioni

Visione di insieme di un sistema elettrico di potenza

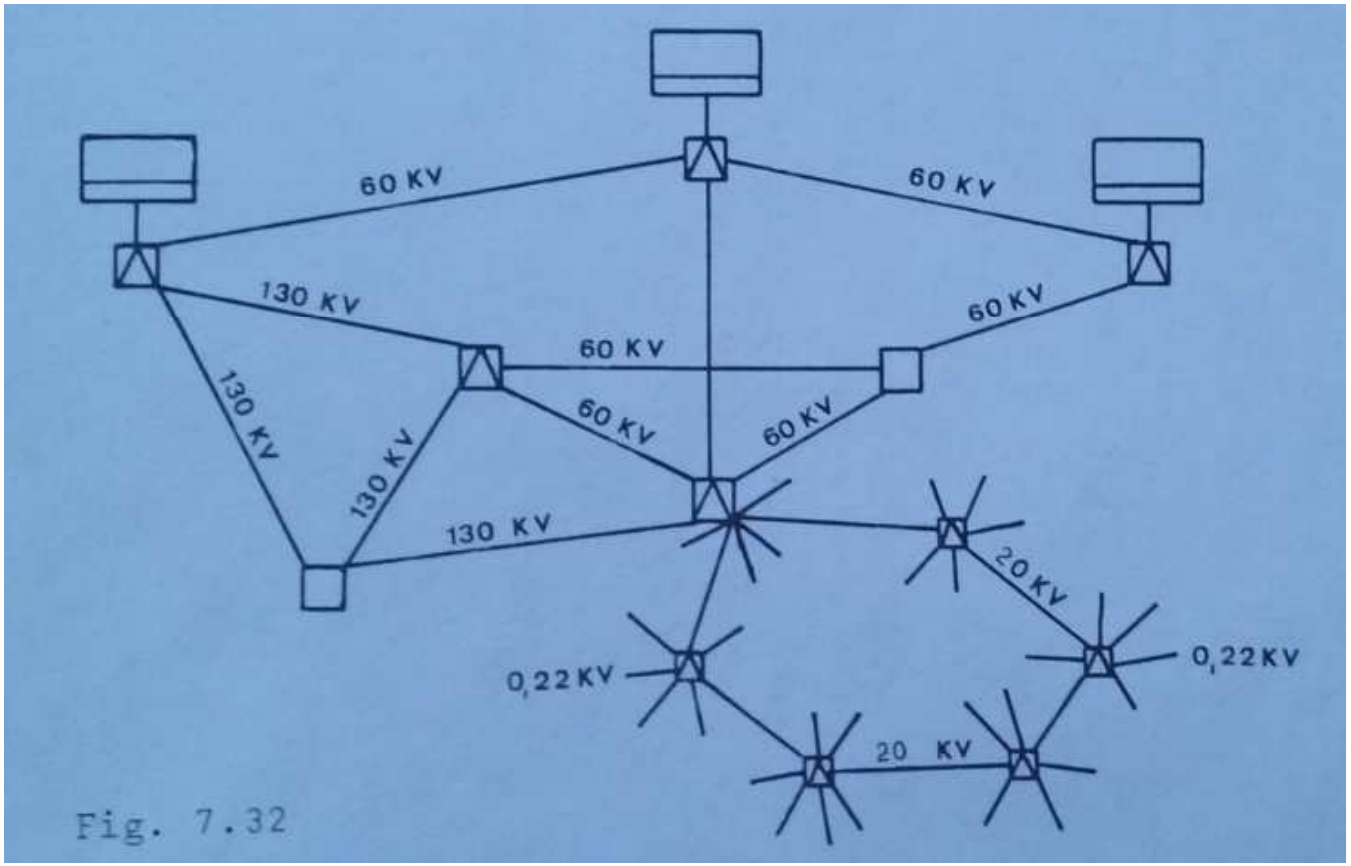
Rete di trasmissione radiale



1, centrale di generazione (gruppi turbina-alternatore)
2, stazione elevatrice (trasformatore elevatore)
3, linea di trasmissione
4, stazione abbassatrice (trasformatore abbassatore)
5, cabina abbassatrice (trasformatore abbassatore)
6, rete di distribuzione secondaria
7, punti di utilizzazione

Legame potenza - lunghezza - tensione

P [MW]	l [km]	V [kV]
500	300 ÷ 1000	380*
130	100 ÷ 300	220
60	60 ÷ 130	130*
25	20 ÷ 60	60
10	10 ÷ 20	20*

* Tensioni unificate nel territorio italiano
(A.T. 380-220 kV, M.T. 20 kV)

Rete di trasmissione a maglie