Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Principi e Applicazioni di Elettrotecnica

Teoremi dei circuiti elettrici

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

www.unipv.it/electric/cad

Teoremi dei circuiti elettrici

Conseguenza di KCL, KVL e della unicità della soluzione di un circuito lineare

Valgono in regime stazionario oppure lentamente variabile

TEOREMA DI TELLEGEN O DELLA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE

Vale per circuiti lineari e non lineari

SE

- **V_i** Tensioni di lato che soddisfano KVL
- **I_i** Correnti di lato che soddisfano KCL

ALLORA

$$\sum_i V_i I_i = 0 \qquad i=1,\ell$$

TEOREMA DI TELLEGEN O DELLA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE

V_i, I_i COESISTENTI

→ $V_i I_i$ è potenza effettiva

V_i, I_i NON COESISTENTI

→ $V_i I_i$ è potenza virtuale

TEOREMA DI TELLEGEN O DELLA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE

COROLLARIO

Se c’è un solo generatore di tensione, la sua E è maggiore delle altre V

(non amplificazione della tensione)

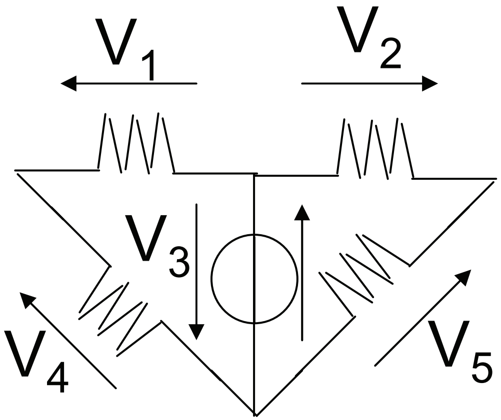
Se c’è un solo generatore di corrente, la sua A è maggiore delle altre I

(non amplificazione della corrente)

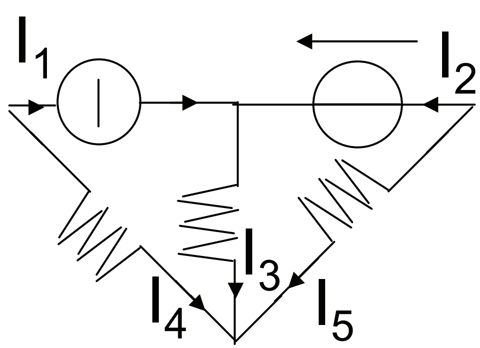
Teoremi dei circuiti elettrici

- Esempio

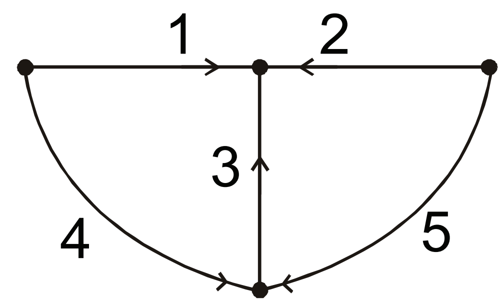
V_i



I_i



Due circuiti diversi, con lo stesso grafo



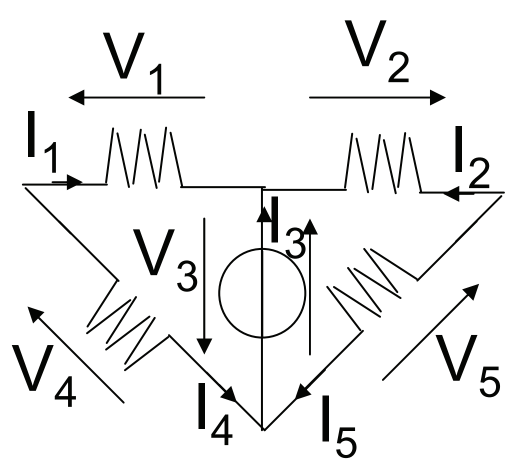
$$\Downarrow$$

$$\sum_{1}^{5} V_i I_i = 0$$

Potenze virtuali

Teoremi dei circuiti elettrici

- Esempio



$$\sum_{1}^{5} V_i I_i = 0$$

Potenze effettive

Teoremi dei circuiti elettrici

Data C, matrice di incidenza ridotta (o dei tagli fondamentali)

Si ha:

$CI = 0$ **se I soddisfano KCL**

$V = C^T \overline{V}$ **se V soddisfano KVL**

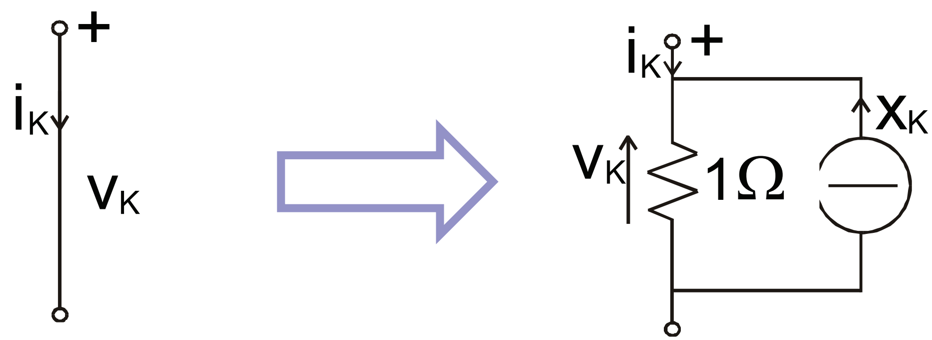
$$V^T I = \left(C^T \overline{V}\right)^T I = \overline{V}^T \left(C^T\right)^T I = \overline{V}^T C I = \overline{V}^T (CI) = 0$$

→ **V e I sono vettori ortogonali**

N.B. - $\overline{V}$ potenziali di nodo o tensioni di lato d'albero

RIESAME DEL TEOREMA DI TELLEGEN

- L'insieme di tutti i vettori delle correnti di lato tali che CI=0 formano uno spazio lineare V_I
- L'insieme di tutti i vettori delle tensioni di lato tali che MV=0 formano uno spazio lineare V_V
- Per Tellegen, $V^T I=0$ ⇔ V_I e V_V sono sottospazi ortogonali di R^ℓ
  ($\forall$ vettore di V_I è ortogonale a $\forall$ vettore di V_V)



$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{V_I} & & \\ & & \in & & \\ v & = & i & + & x \\ \in & & & & \in \\ \mathbf{V_V} & & & & \mathbf{R^\ell} \end{array}$$

TEOREMA DI VON HELMHOLTZ O DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Vale per circuiti lineari

CHIAMIAMO

CAUSE **C** tensioni o correnti impresse da generatori indipendenti

EFFETTI **E** tensioni o correnti risultanti nei lati

SE in un circuito sono presenti più cause

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

TEOREMA DI HELMHOLTZ O DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Pensiamo ciascuna causa agente da sola

Le altre n-1 sono escluse (generatore ideale di tensione: corto circuito; generatore ideale di corrente: circuito aperto)

$$C_1 \longrightarrow E_1$$
$$C_2 \longrightarrow E_2$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$C_n \longrightarrow E_n$$

ALLORA

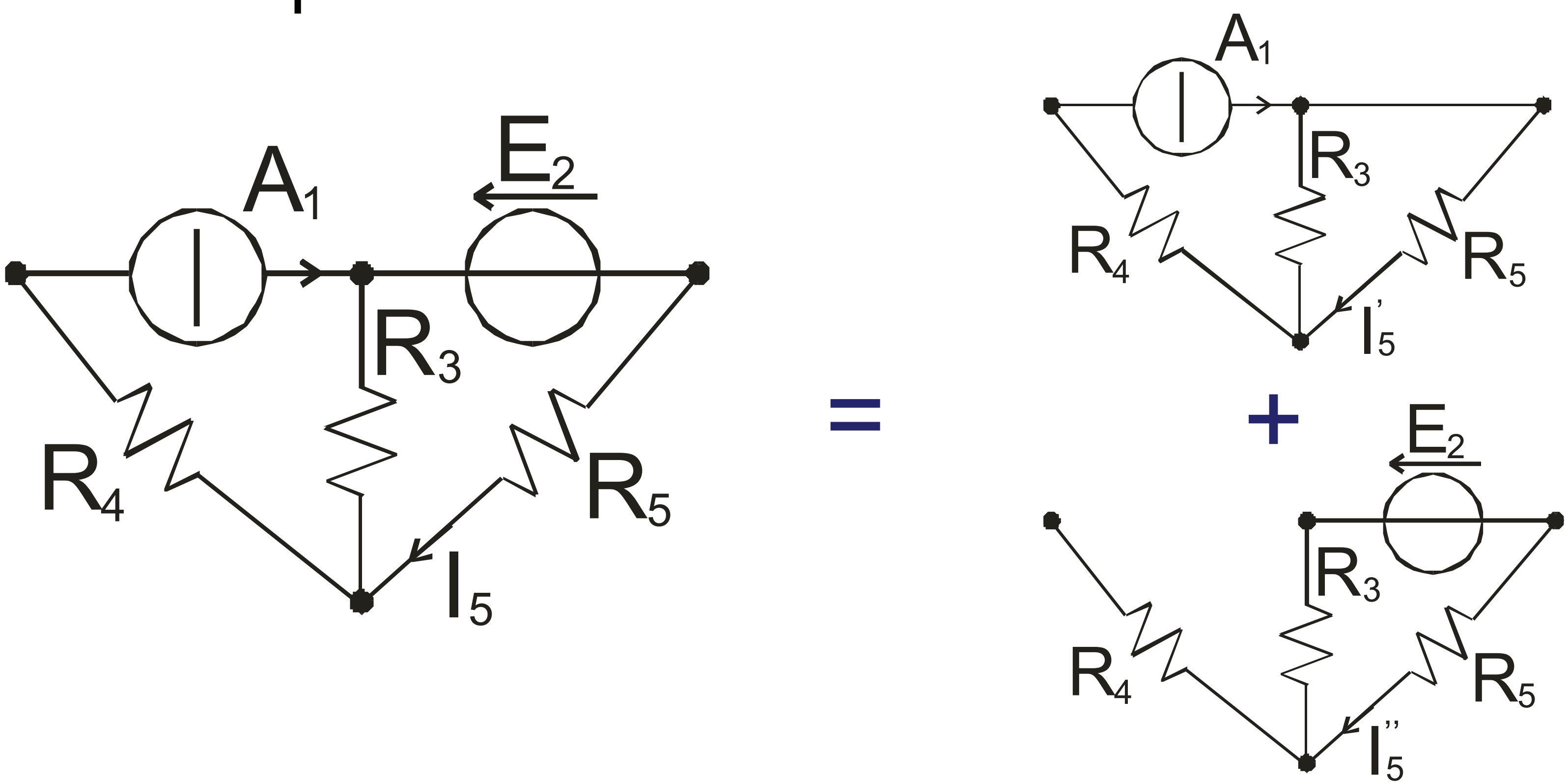
l'effetto totale è la sovrapposizione dei singoli effetti

$$E = E_1+E_2+\dots+E_n$$

NOTA – se ci sono generatori dipendenti, questi vanno lasciati sotto l'effetto di tutte le cause

Teoremi dei circuiti elettrici

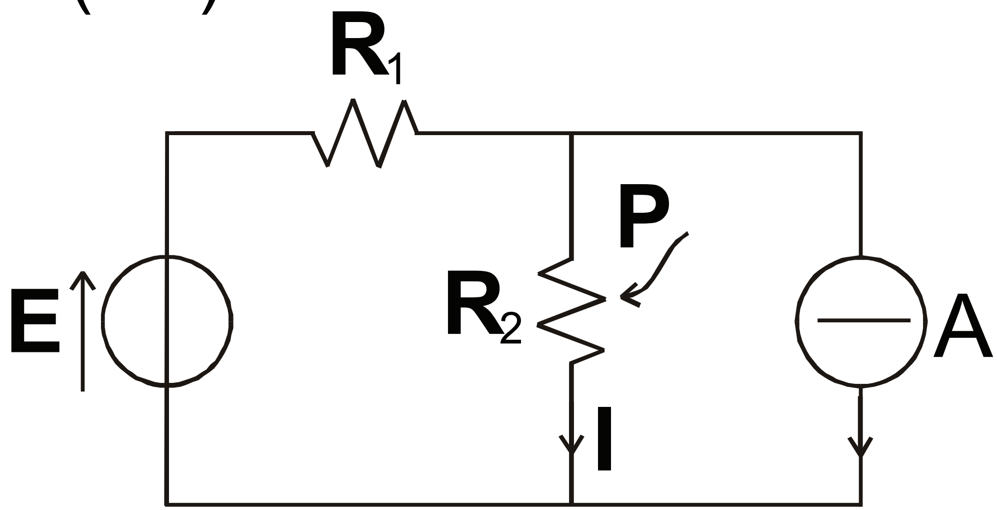
- Esempio

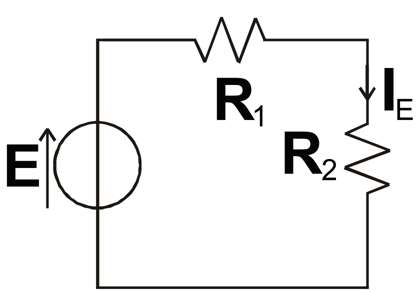


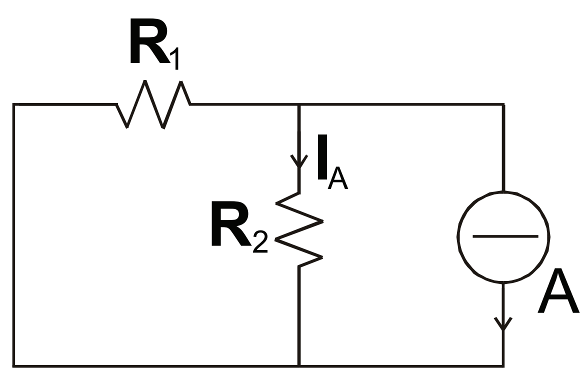
$$I_5 = I_5^{'} + I_5^{''} \qquad I_5^{'} = A_1 \frac{R_3}{R_3 + R_5} \qquad I_5^{''} = -\frac{E_2}{R_3 + R_5}$$

Teoremi dei circuiti elettrici

- Esempio (1/2)







$$I = I_E + I_A$$

$$I_E = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$I_A = -A \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

- Esempio (2/2)

$$P_E = R_2 I_E^2 = \frac{R_2 E^2}{(R_1 + R_2)^2} \qquad P_A = R_2 I_A^2 = \frac{R_1^2 R_2 A^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$P = P_E + P_A = \frac{R_2 E^2 + R_1^2 R_2 A^2}{(R_1 + R_2)^2}$$ **?** **NO**

$$P = R_2 (I_E + I_A)^2 = R_2 I_E^2 + R_2 I_A^2 + 2R_2 I_E I_A = P_E + P_A + 2R_2 I_E I_A$$ **?** **SI'**

NOTA

I è una funzione lineare degli ingressi (E,A)

→ Vale la sovrapposizione degli effetti

P non è una funzione lineare degli ingressi (E,A)

→ NON vale la sovrapposizione degli effetti

TEOREMA DI SOSTITUZIONE O DI COMPENSAZIONE

Vale per reti qualsiasi (lineari e non lineari)

SE il lato *i* è sostituito da
un generatore ideale di tensione con $E=V_i$
oppure
un generatore ideale di corrente con $A=I_i$

ALLORA il funzionamento del circuito non cambia

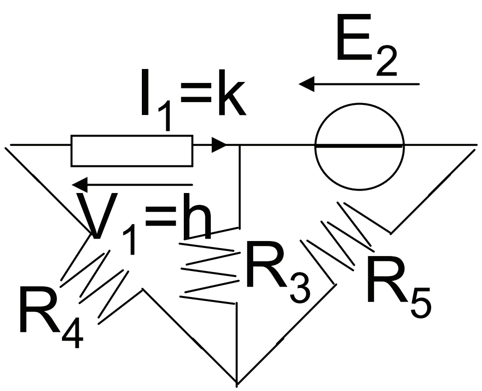
IPOTESI FONDAMENTALE

La rete ha una e una sola soluzione

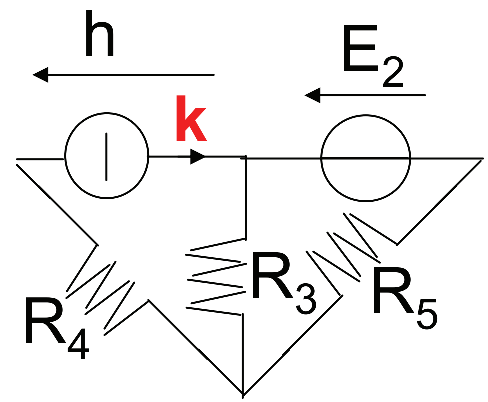
(ipotesi banale nel caso lineare)

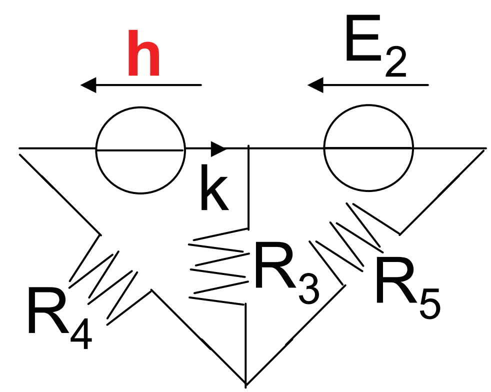
Teoremi dei circuiti elettrici

- Esempio



≡

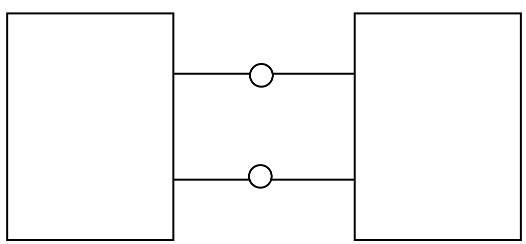




TEOREMA DEL GENERATORE EQUIVALENTE

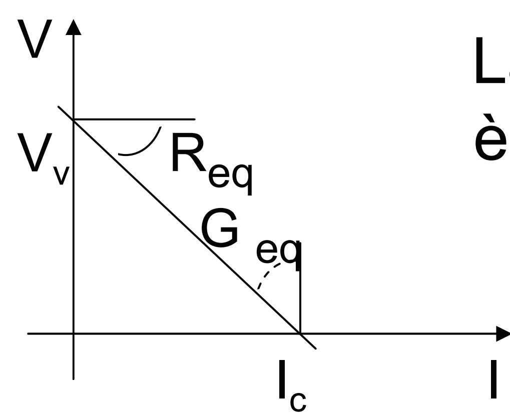
Valgono per circuiti lineari

Se si seziona un circuito in due parti mettendo in evidenza due morsetti



ciascuna parte è un bipolo

Un bipolo è noto quando è nota la sua caratteristica.
Se il bipolo è lineare, la caratteristica è lineare



La caratteristica è individuata da

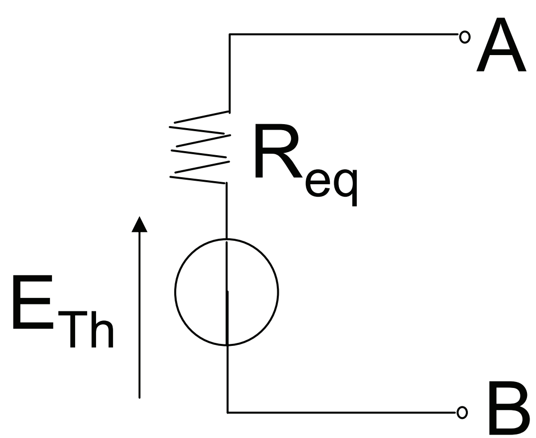
(V_v, R_{eq})
oppure
(I_c, G_{eq})

TEOREMI DEL GENERATORE EQUIVALENTE

allora

Teorema di Thevenin

Un circuito lineare a due morsetti può essere sostituito da un generatore reale lineare di V



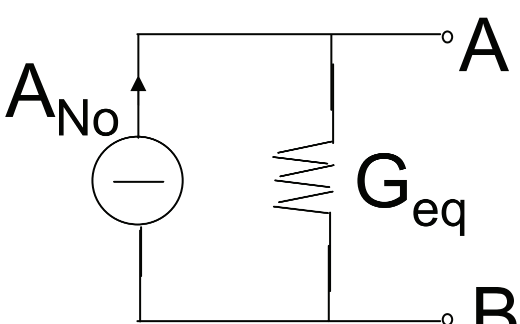
tale che $E_{Th}=V_v$ e $R_{eq}=V_V/I_c$

Se non ci sono generatori dipendenti $R_{eq}=R_{AB}$ che appare tra A e B quando sono esclusi i generatori

TEOREMI DEL GENERATORE EQUIVALENTE

Teorema di Norton

Un circuito lineare a due morsetti può essere sostituito da un generatore reale lineare di I



tale che $A_{No}=I_c$ e $G_{eq}=I_c/V_v$

Se non ci sono generatori dipendenti $G_{eq}=G_{AB}$ che appare tra A e B quando sono esclusi i generatori