Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Teoria dei Circuiti

DINAMICA DEI CIRCUITI

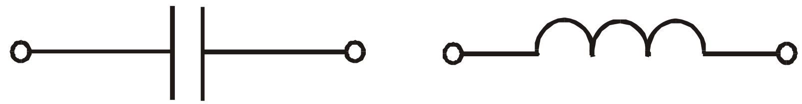
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

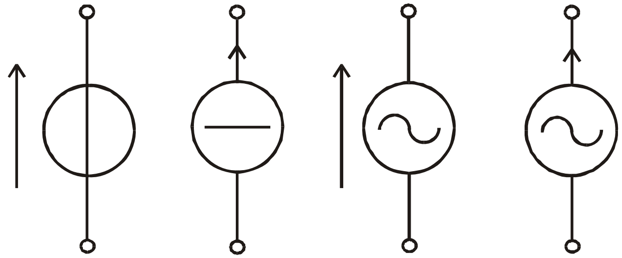
www.unipv.it/electric/cad

I CIRCUITI COMPRENDONO:

- Sorgenti interne di energia



- Sorgenti esterne di energia

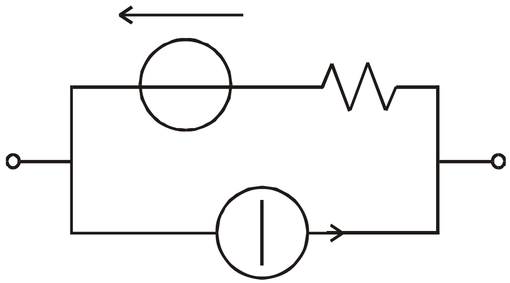


- Utilizzatori passivi di energia

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

I CIRCUITI COMPRENDONO:

- **Utilizzatori attivi di energia**

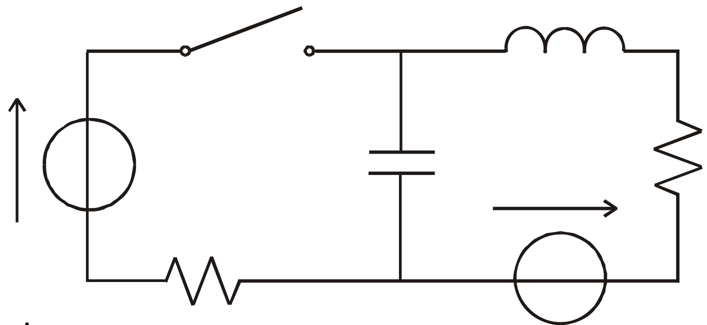


- **Interruttori**

Per connettere o disconnettere lati

funzionamento perturbato

Esempio



- **Circuito elettrico lineare:**

  Tutti i lati sono lineari

- **Circuito elettrico a parametri tempo-invarianti:**

  I parametri caratteristici dei lati (R,L,M,C) non cambiano nel tempo

$t = 0$ **Commmutazione dell'interruttore**

$t = 0^-$ istante immediatamente precedente

$t = 0^+$ istante immediatamente successivo

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Grandezze di ingresso:**

  E, A, e(t), a(t) impresse dai generatori

- **Grandezze di stato (memoria del circuito):**

  $$\begin{cases} v_C & \textbf{dei condensatori indipendenti} \\ i_L & \textbf{degli induttori indipendenti} \end{cases}$$

- **Grandezze di uscita:**

  ***v*, *i* in ogni lato (risposta del circuito)**

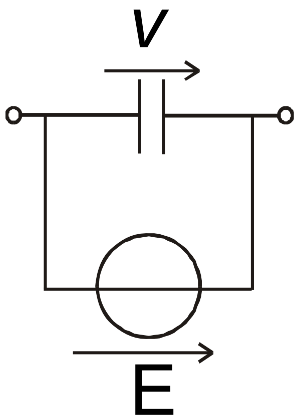
- **Analisi del circuito**

  NOTI v_C, i_L in $t = 0$ (stato iniziale)
  NOTI e, a per $t \geq 0$ (ingresso)

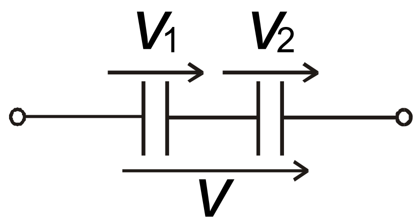
  Allora *v*, *i* sono noti in ogni t >0

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

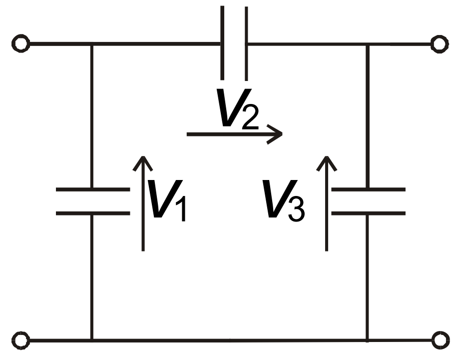
- **Non sono indipendenti:**



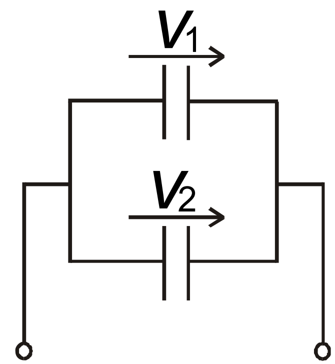
$$v = E$$



$$v = v_1 + v_2$$



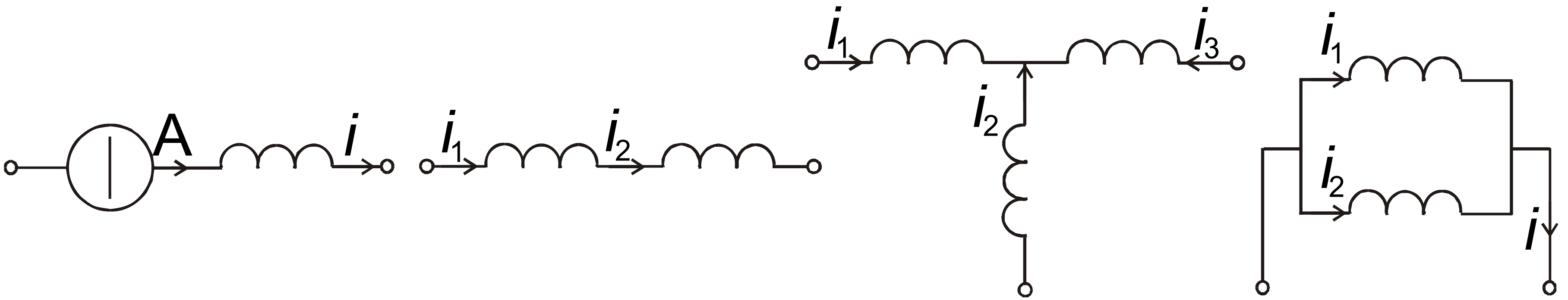
$$\sum_{i=1}^{3} v_i = 0$$



$$v_1 = v_2$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- **Non sono indipendenti:**

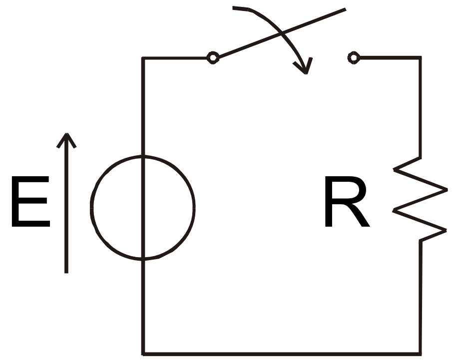


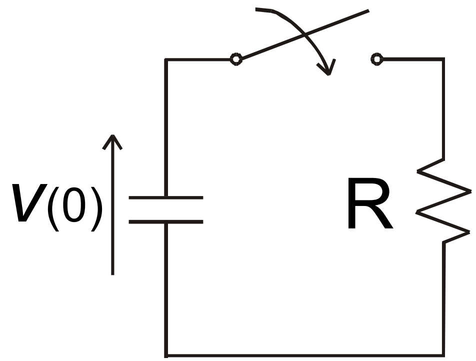
$i = A$ $\qquad$ $i_1 = i_2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{3} i_i = 0$ $\qquad$ $i = i_1 + i_2$

I VALORI DELLE VARIABILI DI LATO SONO VINCOLATI DALL'EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO

LA RISPOSTA DEL CIRCUITO E' DOVUTA A:

- Sorgenti esterne di **energia infinita**
  (la risposta si mantiene indefinita)
- Sorgenti interne di **energia finita**
  (la risposta si esaurisce)





Prima della manovra t<0
regime iniziale

&

Molto tempo dopo la manovra t → ∞ regime finale

LA RISPOSTA E' DOVUTA A SORGENTI ESTERNE

LA RISPOSTA DEL CIRCUITO E' DOVUTA A:

- Nell'intervallo di tempo intermedio:

TRANSITORIO

LA RISPOSTA E' DOVUTA A SORGENTI ESTERNE

+

SORGENTI INTERNE

Regime iniziale | Transitorio | Regime finale

0 | $t \rightarrow \infty$

Dati iniziali: valori delle grandezze a $t = 0^-$

Valori iniziali: valori delle grandezze a $t = 0^+$

Analisi del circuito nel funzionamento transitorio

- Avvenuta la commutazione dell'interruttore (apertura, chiusura) a $t = 0$
- Noti:
  - i parametri: R, L, M, C
  - gli ingressi: A, E, $a(t)$, $e(t)$
  - lo stato iniziale: $v_C(0)$, $i_L(0)$

RICAVARE LA RISPOSTA DEL CIRCUITO

$$\boxed{x(t) \quad , \quad 0 < t < \infty}$$

Analisi del circuito nel funzionamento transitorio

- Metodo matematico classico

$$X = X_r + X_t$$

ingresso

ingresso e stato

r: regime
t: transitorio

- Metodo fisico moderno

$$X = X_{i=0} + X_{s=0}$$

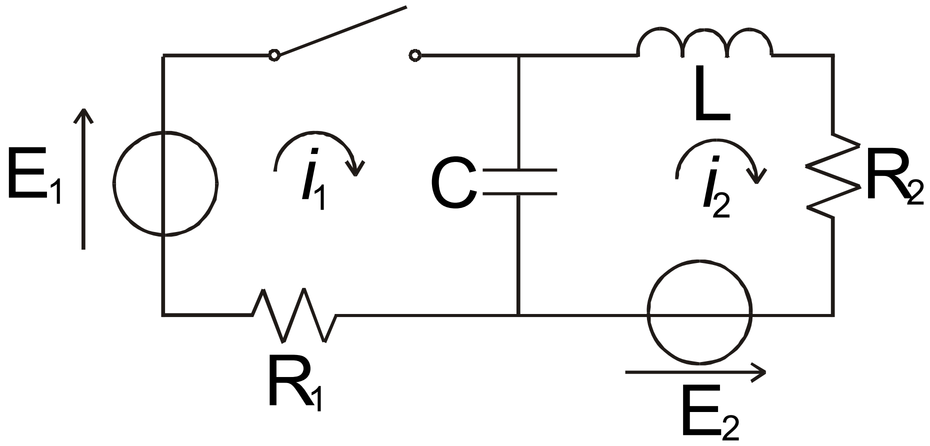
i: ingresso
s: stato

solo sorgenti interne → transitorio

solo sorgenti esterne → transitorio e regime

Metodo classico

- Vale per i circuiti lineari a parametri invarianti nel tempo
- Non è un metodo automatico



t = 0 chiusura

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Scegliere il metodo di analisi (generale, potenziali di nodo, correnti di maglia)
- Individuare le incognite
- Scrivere le equazioni integro – differenziali che governano il circuito, ponendo:

$$\frac{d}{dt} \equiv D \qquad\qquad \int_0^t \cdot\, dt' \equiv D^{-1}$$

a commutazione avvenuta $t \geq 0^+$

- Scegliendo il metodo delle correnti di maglia, le incognite sono i_1, i_2

- Maglia 1

KVL
$$E_1 - C^{-1}\int_{-\infty}^{t}(i_1 - i_2)dt' - R_1 i_1 = 0$$

- Maglia 2

KVL
$$C^{-1}\int_{-\infty}^{t}(i_2 - i_1)dt' + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + E_2 = 0$$

poiché
$$\int_{-\infty}^{t}\cdot\, dt' = \int_{-\infty}^{0}\cdot\, dt' + \int_{0}^{t} dt' = K + D^{-1}$$

si ha

$$E_1 - v_C(0) - C^{-1}D^{-1}(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0 \qquad (1)$$

$$-v_c(0) + C^{-1}D^{-1}(i_2 - i_1) + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 = 0 \qquad (2)$$

Le due equazioni integro-differenziali sono il sistema risolvente

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Dalla (1) si ricava

$$i_1 = \frac{E_1 - v_C(0) + C^{-1}D^{-1}i_2}{R_1 + C^{-1}D^{-1}}$$

Sostituendo nella (2)

$$-v_C(0) + C^{-1}D^{-1}i_2 + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 +$$

$$-C^{-1}D^{-1}\frac{E_1 - v_C(0) + C^{-1}D^{-1}i_2}{R_1 + C^{-1}D^{-1}} = 0$$

Si ha un'equazione integro-differenziale in i_2

$$-R_1 v_c(0) \cancel{- C^{-1}D^{-1}v_c(0)} + R_1 C^{-1}D^{-1}i_2 \cancel{+ \frac{1}{C^2}D^{-2}i_2} + LR_1 Di_2 + LC^{-1}i_2 + R_1 R_2 i_2 +$$

$$+ R_2 C^{-1}D^{-1}i_2 + E_2 R_1 + C^{-1}D^{-1}E_2 - C^{-1}D^{-1}E_1 \cancel{+ C^{-1}D^{-1}v_c(0)} \cancel{- \frac{1}{C^2}D^{-2}i_2} = 0$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Derivando ambo i membri una volta, si ottiene l'eq.ne differenziale di ordine minimo associata alla i.d.

$$\frac{R_1}{C} i_2 + L R_1 D^2 i_2 + \frac{L}{C} D i_2 + R_1 R_2 D i_2 + \frac{R_2}{C} i_2 + \frac{1}{C} E_2 - \frac{1}{C} E_1 = 0$$

$$D^2 i_2 + D i_2 \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right) + i_2 \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{L R_1 C} \right) = \frac{1}{L R_1 C} \left(E_1 - E_2 \right)$$

\+ condizioni iniziali: $i_2(0)$, $Di_2(0)$

Matematicamnete, si risolve il problema di Cauchy.

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Algebra dell'operatore D :

$DD=D^2 \qquad DD^{-1}=D^{-1}D=1 \qquad D\,\text{cost}=0$

- Ricavare un'equazione differenziale lineare in una sola incognita, la funzione x(t), di ordine *n*, a coefficienti costanti, in generale non omogenea:

$$A_n D^n x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_0 X = f(t) \quad , \quad A_i > 0 \quad i=0,n$$

f(t) in generale dipende dalle grandezze di ingresso e dalle loro derivate

Ordine minimo n = numero di bipoli conservativi indipendenti presenti nel circuito

La soluzione matematica:

$$\boxed{X = X_{OM} + X_{PART}}$$

X_{OM}: integrale generale equazione omogenea
X_{PART}: integrale particolare equazione non omogenea

$$X_{OM} = \sum_{r=1}^{n} C_r e^{\alpha_r t}$$

C_r costanti da determinare

α_r radici (distinte) dell'equazione algebrica caratteristica associata all'equazione differenziale omogenea (frequenze naturali)

$$A_n \alpha^n + \dots\dots\dots\dots + A_0 = 0$$

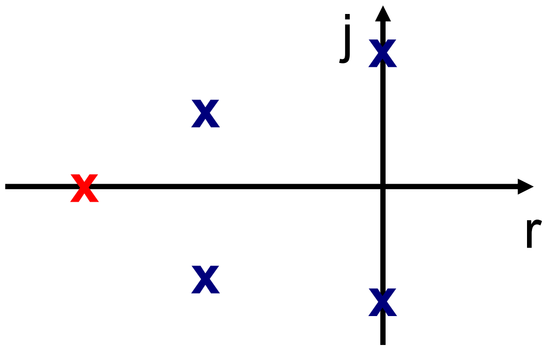
$$[\tau_r] = -\frac{1}{\alpha_r}$$

costanti di tempo caratteristiche

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Si verifica che α_r è:

  - Reale negativa
  - Complessa coniugata con parte reale ≤ 0



Di conseguenza $\lim_{t \to \infty} X_{OM} = 0$

Ovvero $\boxed{X_{OM} = X_t \;\rightarrow\; \text{transitorio}}$

X_{PART} è: - un integrale particolare dell'equazione non omogenea
- certamente la risposta a regime

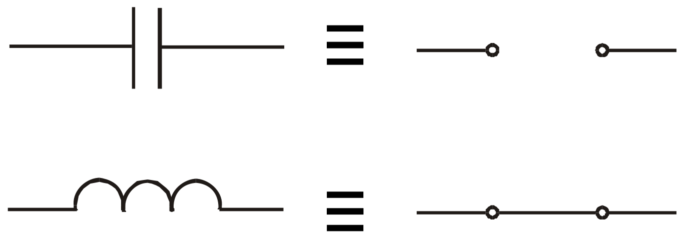
$\boxed{X_{PART} = X_r \;\rightarrow\; \text{regime finale}}$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

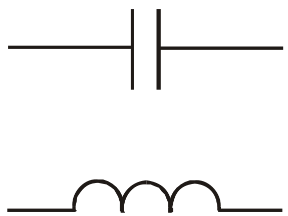
- Fisicamente

Si trova X_{PART} risolvendo il circuito a regime

Stazionario



P.A.S.



$$-\frac{j}{\omega C}$$

$$j\omega L$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Matematicamente

Con il metodo di Lagrange di variazione delle costanti ausiliarie, ad esempio:

$f(t) = A \longrightarrow K$

$f(t) = A\cos\omega t \longrightarrow K_1\cos\omega t + K_2 \mathrm{sen}\,\omega t$

$f(t) = Ae^{rt} \longrightarrow Ke^{rt}$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Determinare i valori iniziali

Noti i dati iniziali di grandezze di stato e di ingresso sono noti tutti i dati iniziali.

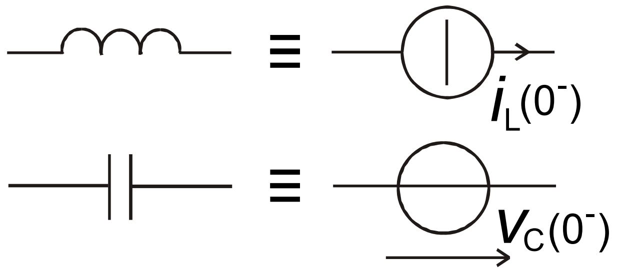
I valori iniziali di grandezze di stato sono uguali ai dati iniziali:

$i_L(0^-)=i_L(0^+)$

$v_C(0^-)=v_C(0^+)$

per continuità delle variabili di stato

Tutti i valori iniziali si ricavano fisicamente dal circuito:



per il teorema di sostituzione

I valori iniziali DX_{0^+}, ….$D^{n-1}X_{0^+}$ si ricavano matematicamente dal sistema di equazioni in 0^+

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Determinare C_r in X_{OM}

Le *n* costanti C_r si ottengono imponendo le *n* condizioni iniziali su:

$$X, Dx, \ldots., D^{n-1}X$$

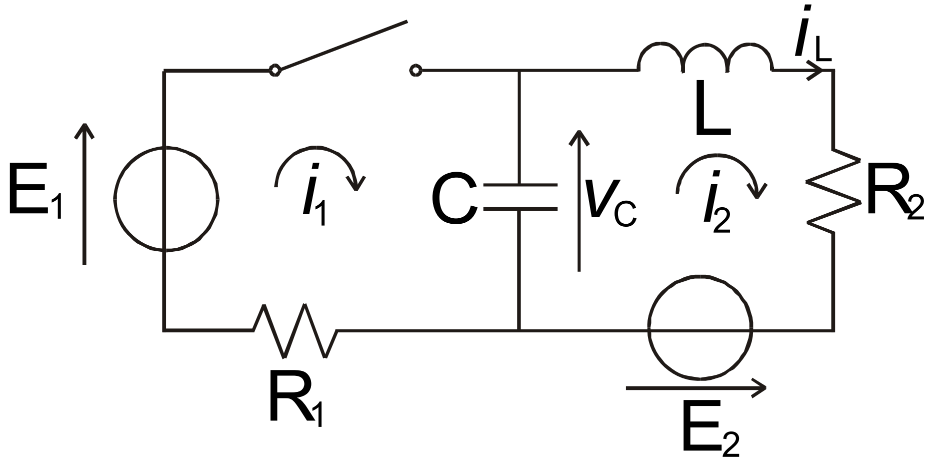
Allora

$$\boxed{X = X_{OM} + X_{PART}}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio: calcolo condizioni iniziali

$t=0^-$

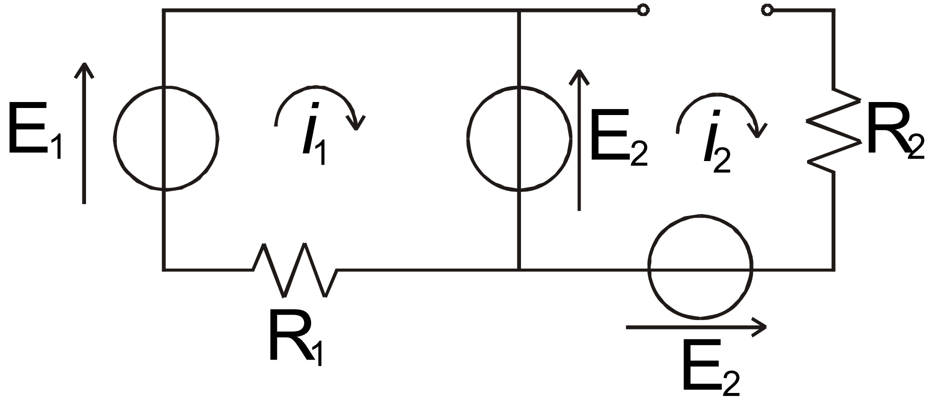


$i_L=0$, $v_C=E_2$ ⟶ $i_1=0$, $i_2=0$ Dati iniziali

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio: calcolo condizioni iniziali

$t=0^+$



$i_L=0$, $v_C=E_2$, $i_1=\dfrac{E_1-E_2}{R_1}$, $i_2=0$ Valori iniziali

In generale, dati iniziali ≠ valori iniziali

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio: calcolo condizioni iniziali

Sistema risolvente per t>0

$$E_1 - v_C(0) - C^{-1}D^{-1}(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0 \qquad (1)$$

$$-v_C(0) + C^{-1}D^{-1}(i_2 - i_1) + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 = 0 \qquad (2)$$

(1)-(2) equivalgono a

$$\cancel{DE_1} - \cancel{Dv_C(0)} - C^{-1}(i_1 - i_2) - R_1 Di_1 = 0 \qquad (1')$$

$$R_1 i_1 - E_1 + LDi_2 + R_2 i_2 + E_2 = 0 \qquad (2')$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio: calcolo condizioni iniziali

Valuto il sistema in $t=0^+$

(1') $$-\frac{1}{C}i_1(0^+)+\frac{1}{C}i_2(0^+)-R_1Di_1(0^+)=0$$

(2') $$R_1i_1(0^+)-E_1+LDi_2(0^+)+R_2i_2(0^+)+E_2=0$$

Dati $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$

Incognite $Di_1(0^+)$, $Di_2(0^+)$

Equazioni: 2 algebriche indipendenti

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio: calcolo condizioni iniziali

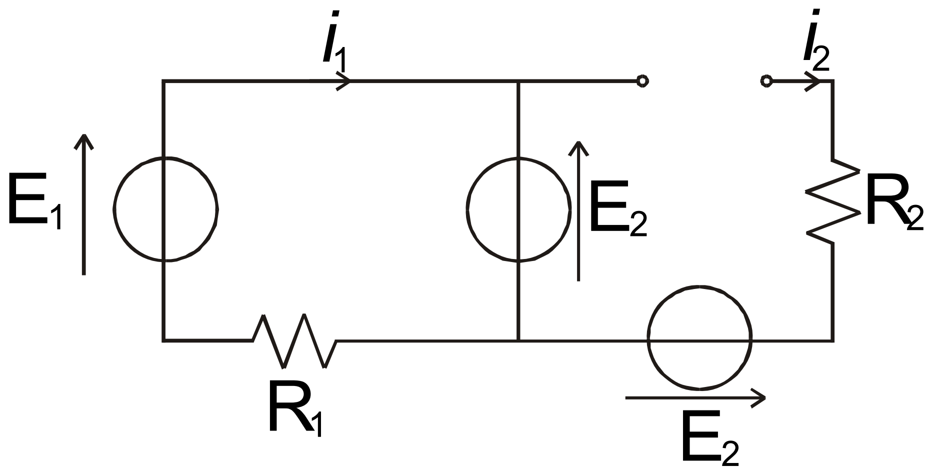
Valuto il sistema in $t=0^+$

$$i_1(0^+) = \frac{E_1 - E_2}{R_1}$$

$$i_2(0^+) = 0$$

$$Di_1(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{CR_1^2}$$

$$Di_2(0^+) = 0$$

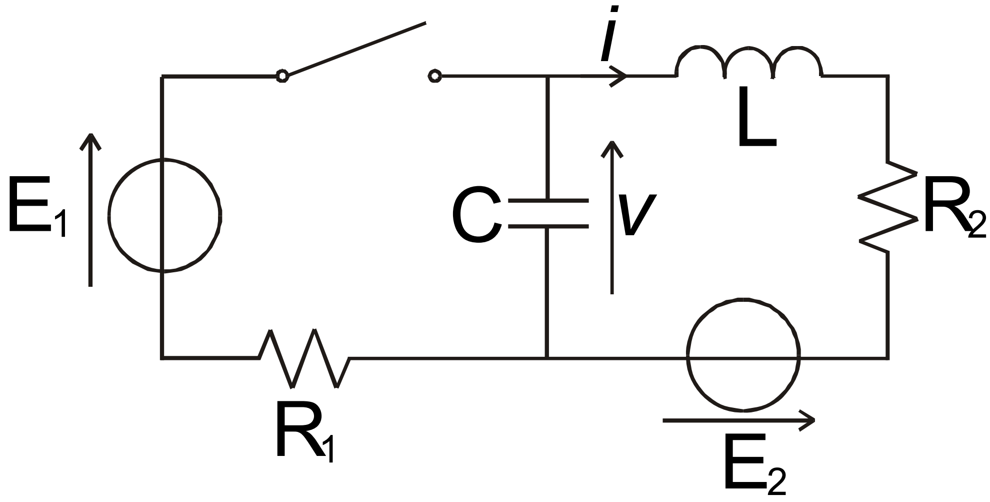


$t=0^+$

Metodo delle variabili di stato

Si può estendere ai circuiti non lineari

Si può rendere automatico

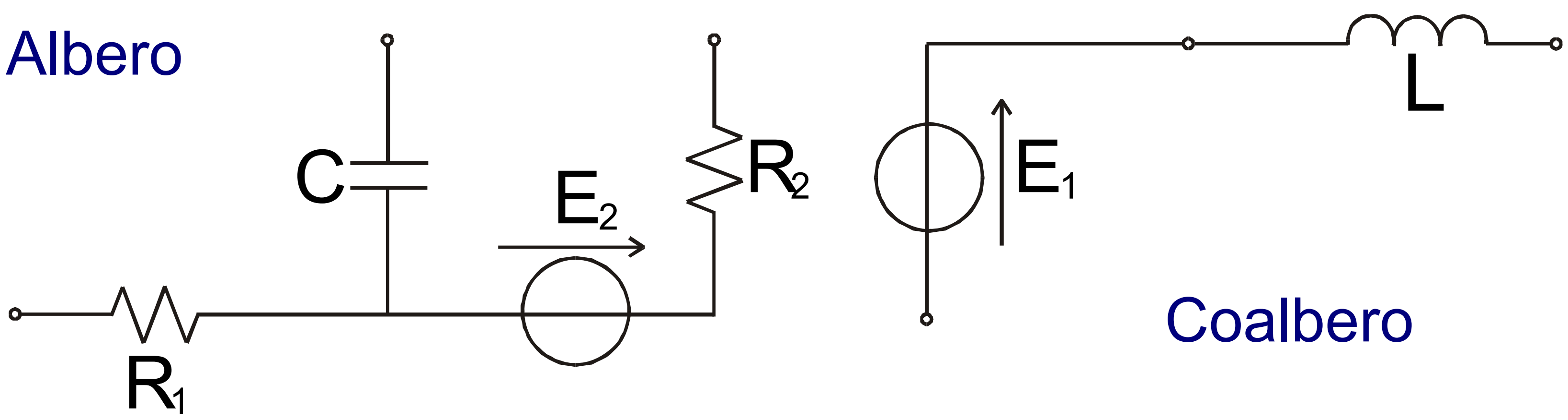


Chiusura in t=0

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

1. Scegliere un albero che contenga tutti i condensatori e nessun induttore

   Scegliere un coalbero che contenga tutti gli induttori e nessun condensatore



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

1. Individuare le incognite

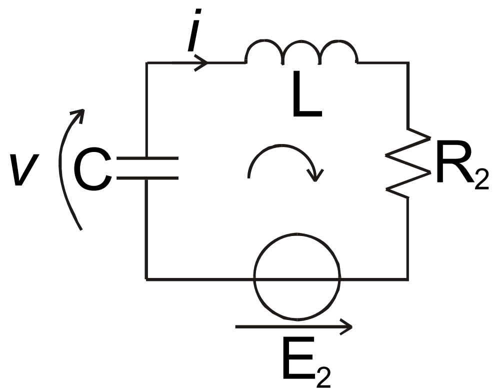
   v dei condensatori
   i degli induttori

   } Variabili di stato

2. Scrivere le equazioni di ogni induttore (KVL alle maglie fondamentali)

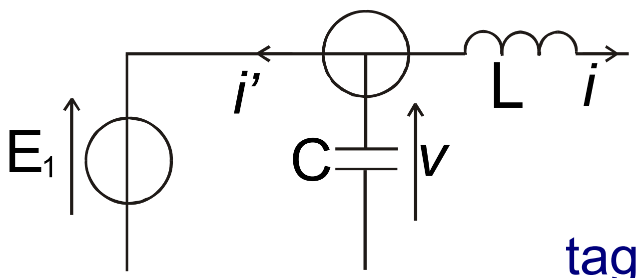
3. Scrivere le equazioni di ogni condensatore (KCL ai tagli fondamentali)

- Esempio



maglia
fondamentale 1

$$v - L\frac{di}{dt} - R_2 i - E_2 = 0$$ **KVL**

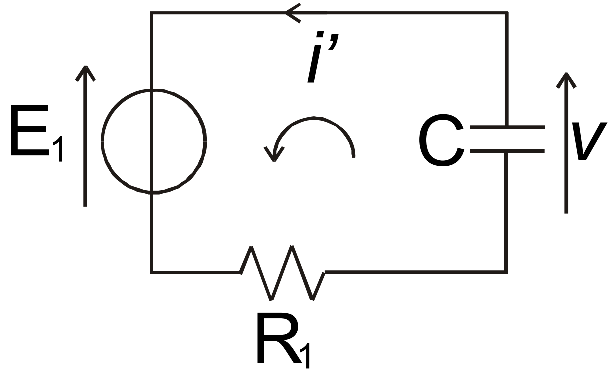


taglio
fondamentale

$$C\frac{dv}{dt} + i + i' = 0$$ **KCL**

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio



maglia fondamentale 2

$$i' = \frac{v - E_1}{R_1}$$

KVL

In definitiva

$$v - LDi - R_2 i - E_2 = 0$$

$$CDv + i + \frac{v}{R_1} - \frac{E_1}{R_1} = 0$$

In generale si ottengono *n* equazioni differenziali del primo ordine se il circuito ha ordine *n*

- Esempio

Se x è il vettore delle incognite (variabili di stato) ed *u* è il vettore degli ingressi all'istante t, il sistema delle *n* equazioni differenziali di primo ordine assume la forma:

$$\mathrm{Dx} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \boxed{\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{u},\mathrm{t})}$$

Nell'esempio

$$Dv = -\frac{v}{R_1 C} - \frac{i}{C} + \frac{E_1}{R_1 C}$$

$$Di = \frac{v}{L} - \frac{R_2}{L} i - \frac{E_2}{L}$$

Se il circuito è lineare, allora

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio

$$x = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Matrice di stato

$$u = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori α della matrice di stato A

det (αI-A)=0

sono le *n* frequenze caratteristiche

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

La risposta all'istante t

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-t')A}Bu(t')dt' =$$

$$= x_{u=0} + x_{X=0}$$

Risposta con ingresso zero

Risposta con stato zero

dove

$$e^{tA} = I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

Matrice esponenziale (matrice di transizione dello stato)

$$x_{u=0} = e^{tA}x(0)$$

È una funzione lineare dello stato

$$x_{X=0} = \int_0^t e^{(t-t')A}Bu(t')dt'$$

È una funzione lineare dell'ingresso

Frequenze caratteristiche:

autovalori della matrice di stato $\det(\alpha I - A) = 0$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1 C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix}\right\} = \det\begin{bmatrix} \alpha + \dfrac{1}{R_1 C} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & \alpha + \dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{R_1 C}\right)\left(\alpha + \frac{R_2}{L}\right) + \frac{1}{LC} = 0$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R_2}{2L} - \frac{1}{2R_1C} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right)^2 - 4\left(\frac{R_2}{R_1LC} + \frac{1}{LC}\right)}$$

Matrice di transizione dello stato

$$e^{tA} = e^{\alpha_1 t}\frac{A - \alpha_2 I}{\alpha_1 - \alpha_2} + e^{\alpha_2 t}\frac{A - \alpha_1 I}{\alpha_2 - \alpha_1} \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

dal teorema di Cayley-Hamilton

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Determinata la risposta x(t) in termini dello stato (v_C,i_L)

si ricava la risposta y(t) in termini di (v,i) per ogni lato

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Ingresso→stato

integro-differenziale

Il legame

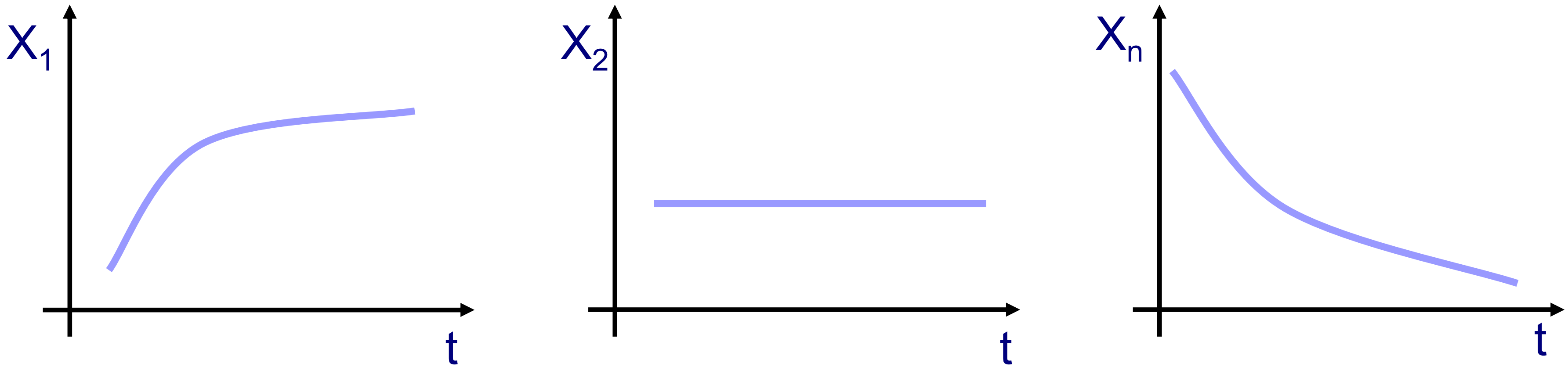
è

Ingresso+stato→uscita

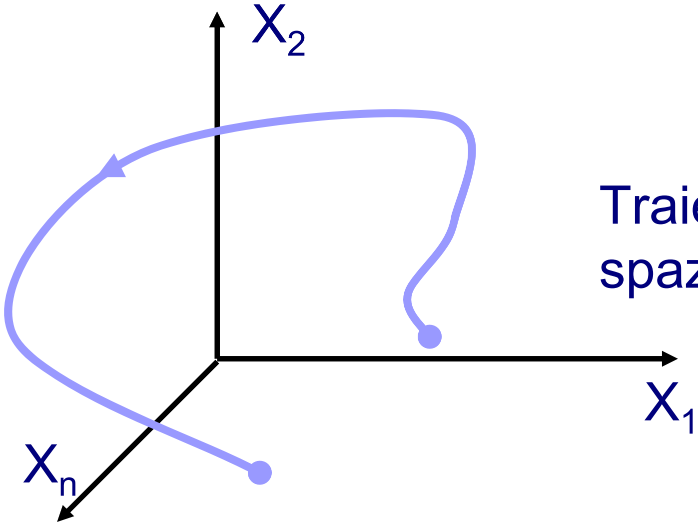
algebrico

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Rappresentazione della soluzione



$$X_{u=0} = e^{tA} X(0)$$

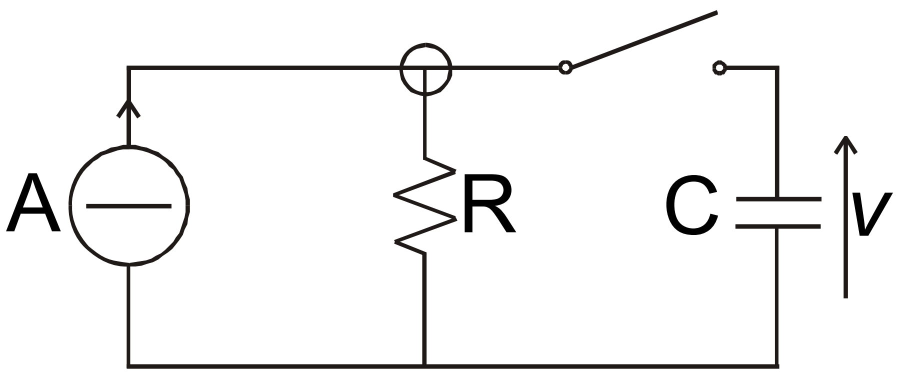


Traiettoria della risposta nello spazio delle fasi

Circuiti del primo ordine in regime perturbato

- Un solo bipolo conservativo (indipendente)
- Un circuito lineare a parametri tempo invarianti con generatori di grandezze costanti nel tempo

Esempio



Dati: A,R,C

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-)=V_0$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

1. METODO CLASSICO

Variabile: *v*

Metodo di analisi: **Potenziali di nodo**

KCL o $CDv+\frac{1}{R}v = A$

Soluzione $v=v_{OM}+v_{PART}$

$v_{OM} \longrightarrow Dv+\frac{v}{RC}=0$

$\alpha+\frac{1}{RC}=0 \longrightarrow \alpha=-\frac{1}{RC}$ Frequenza caratteristica

$\tau=-\frac{1}{\alpha}=RC$ Costante di tempo

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$v_{OM} = Ke^{-t/RC}$

v_{PART} Dal punto di vista fisico corrisponde al regime finale (nel caso stazionario, condensatore = circuito aperto e induttore = corto circuito)

$v_{PART} = RA$

Allora $v(t) = Ke^{-t/RC} + RA$

Condizioni iniziali $v(0^-)=V_0$ Dato iniziale

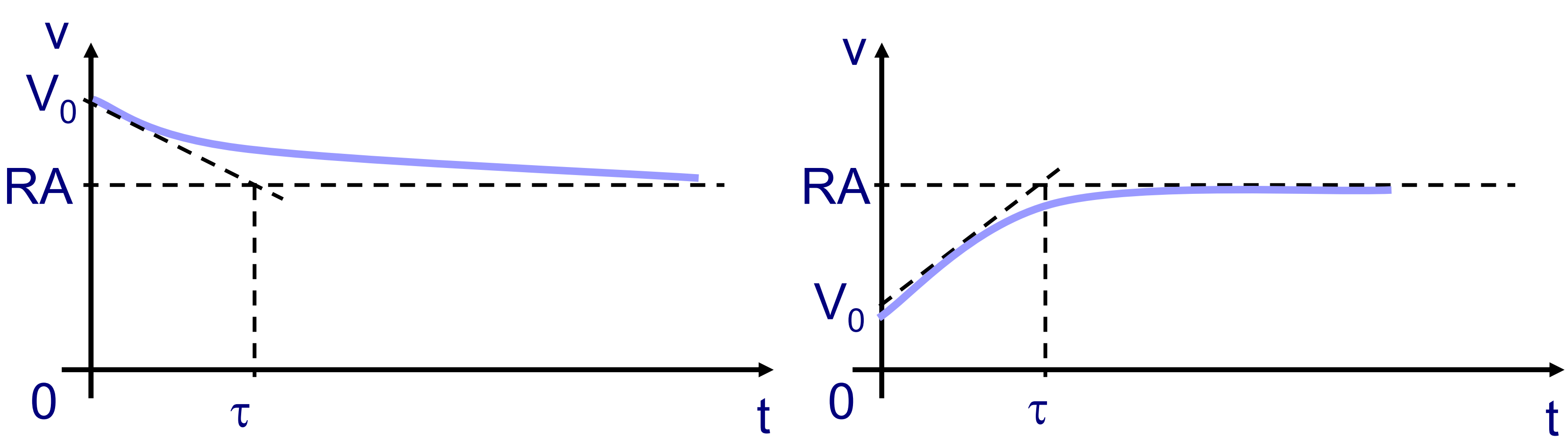
per continuità $v(0^+)=V_0$ Valore iniziale

$V_0 = K + RA \longrightarrow K = V_0 - RA$

La risposta risulta

$$v = \underbrace{(V_0 - RA)e^{-t/RC}}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{RA}_{\text{Regime}}$$

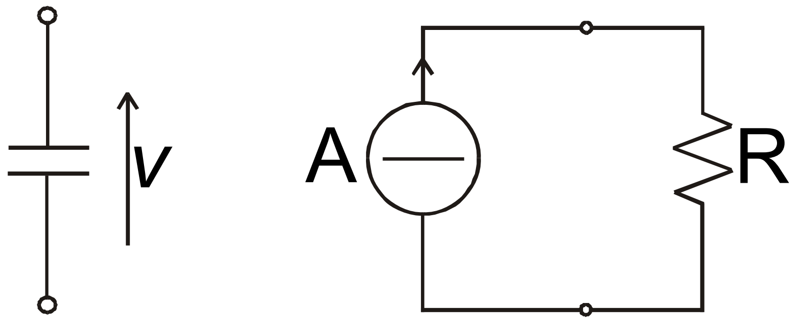
Graficamente



$V_0 > RA$ $V_0 < RA$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

2. METODO DELLE VARIABILI DI STATO



albero coalbero

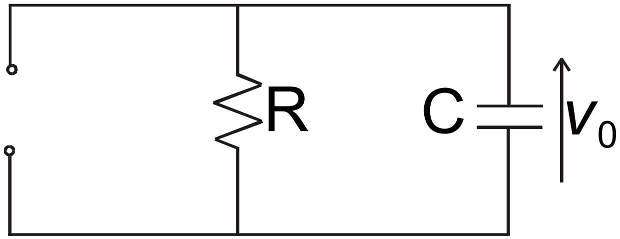
KCL al taglio fondamentale

$$Dv = -\frac{v}{RC} + \frac{A}{C} \qquad Dx = [A]x + [B]u$$

$$[A] = -\frac{1}{RC} \qquad [B] = \frac{1}{C} \qquad u = A \qquad x = v$$

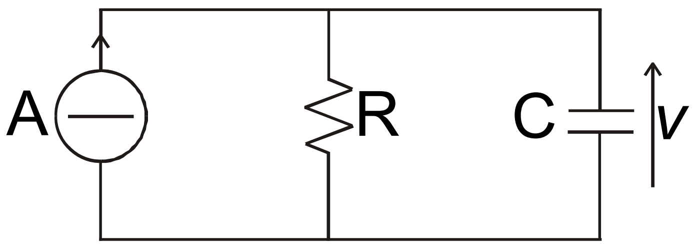
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Ingresso nullo (A=0)



$$v_{u=0} = v(0)e^{tA} = V_0 e^{-t/RC}$$

Stato nullo (v_0=0)



$$v_{X=0} = \int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-t')} \frac{A}{C} dt' = e^{-\frac{t}{RC}} \frac{A}{C} \left[RCe^{+t'/RC} \right]_0^t$$

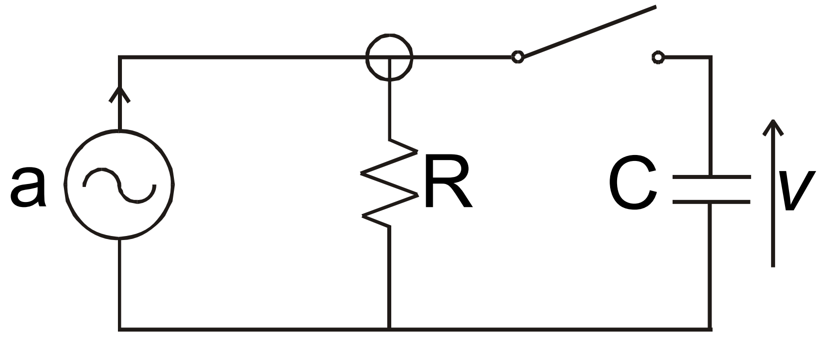
$$= e^{-t/RC} \frac{A}{C} \left(RCe^{+t/RC} - RC \right) = RA\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Risposta completa

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} + RA(1 - e^{-t/RC})$$

Circuiti lineari a parametri tempo invarianti con generatori di grandezze P.A.S.

Esempio



Dati: R,C, $a(t)=A\cos\omega t$

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-)=V_0$

Risoluzione con metodo classico

Variabile *v*

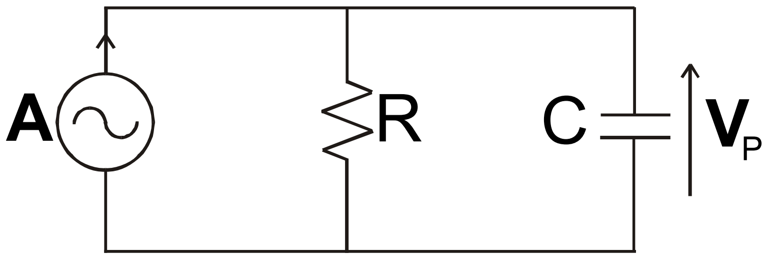
Metodo di analisi: **Potenziali di nodo**

KCL o $CDv+\dfrac{1}{R_1}v=a$

Soluzione $v=v_{OM}+v_{PART}$ $v_{OM}=Ke^{-t/RC}$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

V_{PART} corrisponde al regime finale



$$A = \frac{A}{\sqrt{2}}\angle 0$$

$$V_P = V_{PART} = ZA \qquad Y = 1/R + j\omega C \qquad Y = 1/Z$$

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}\ \angle\vartheta \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}}\ \angle -\vartheta$$

$$\vartheta = \mathrm{arctg}(\omega RC)$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$$\rightarrow \quad V_{PART}(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}} \cos(\omega t - \vartheta) = V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

$$\rightarrow \quad v = K e^{-t/RC} + V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

Condizione iniziale

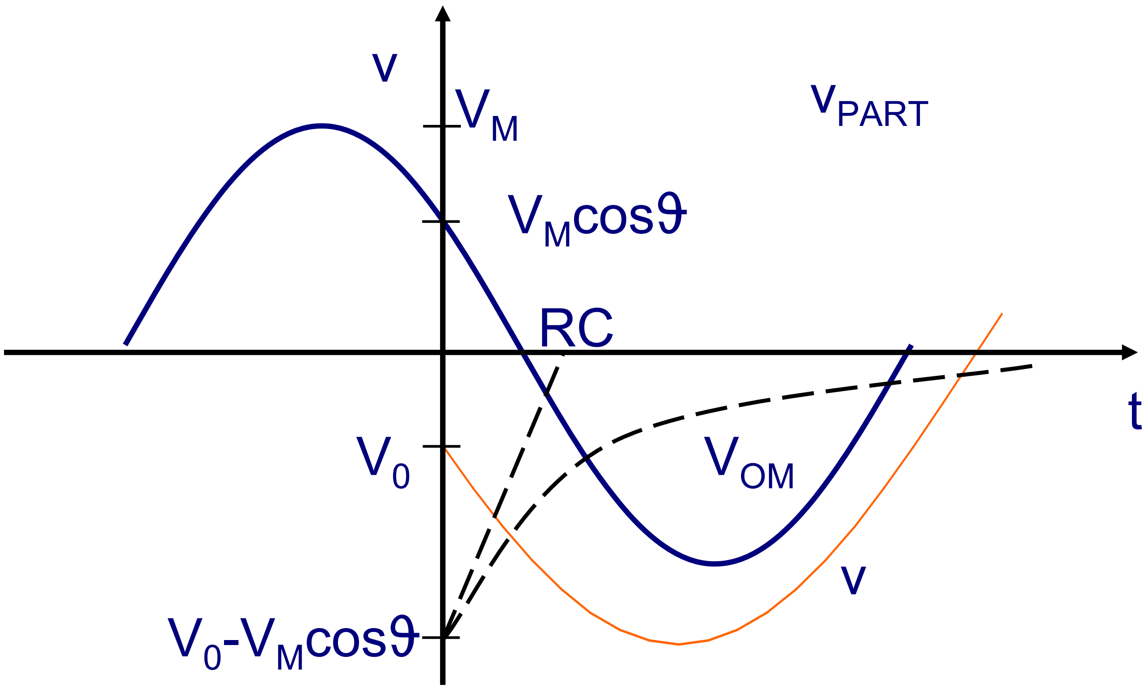
$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

$$V_0 = K + V_M \cos\vartheta \qquad K = V_0 - V_M \cos\vartheta$$

Risposta completa

$$v(t) = (V_0 - V_M \cos\vartheta) e^{-t/RC} + V_M \cos(\omega t - \vartheta)$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato



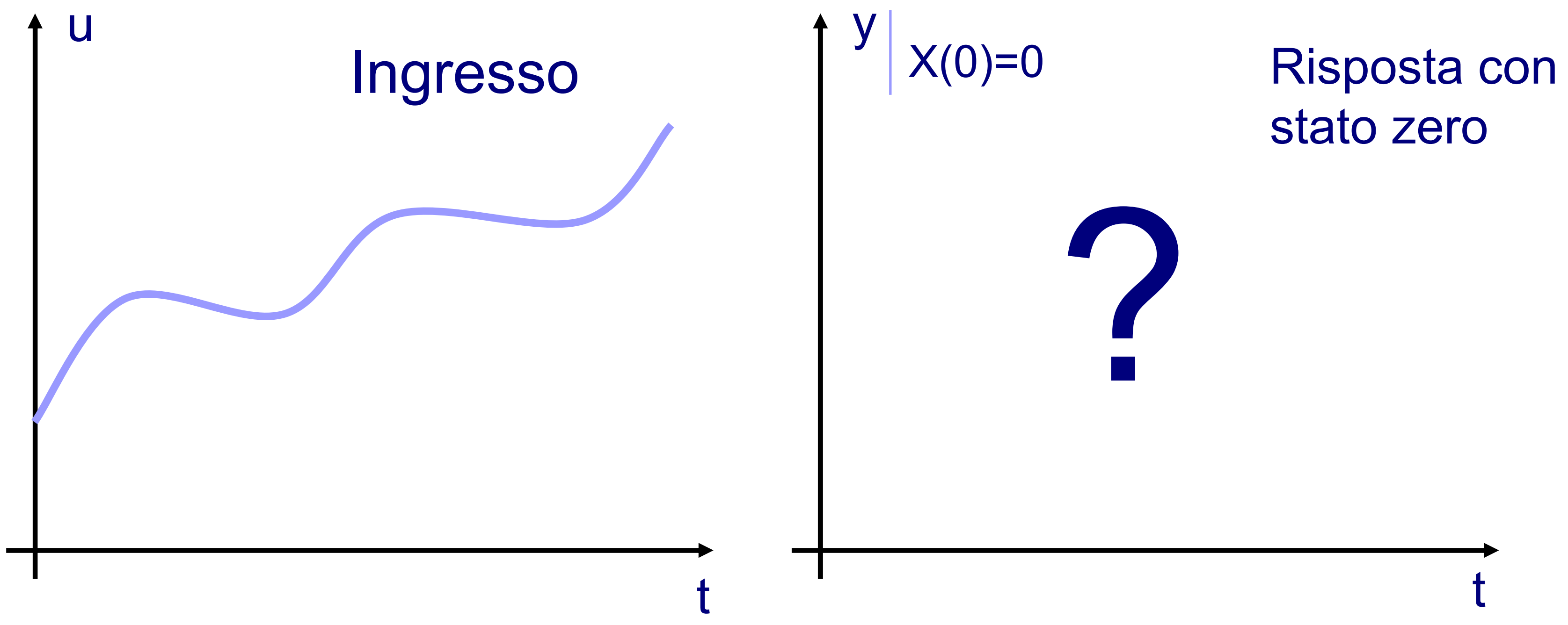
Se $V_0-V_M\cos\vartheta=0$ → $v_{OM}(t)=0$

→ Regime a t=0

A pari V_0, v_{OM} è massima per $\vartheta=0$

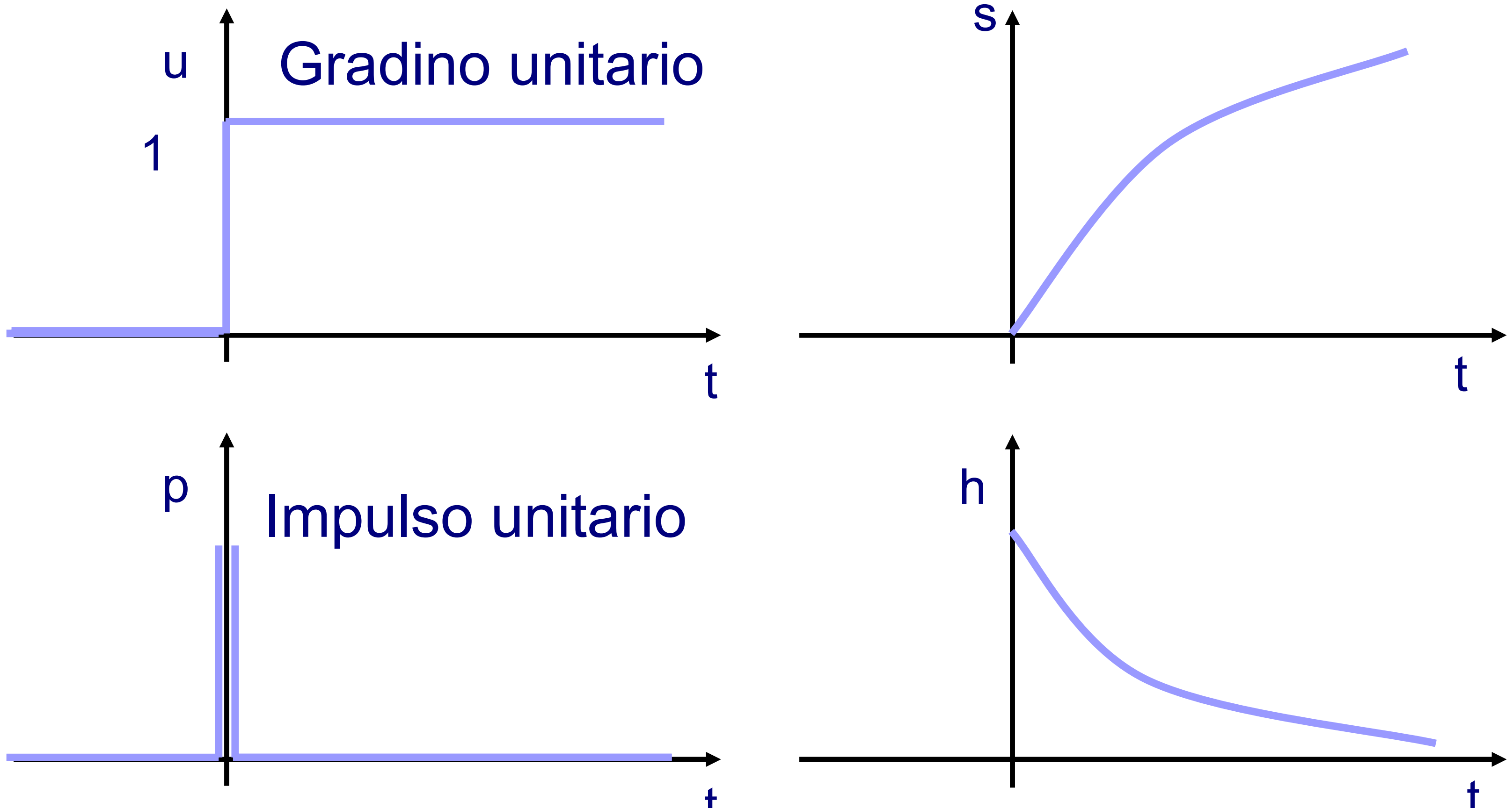
→ Se $RC >> \dfrac{2\pi}{\omega}$ Allora $v_{MAX} \approx |V_0 - 2V_M|$

Risposta di un circuito lineare a parametri tempo-invarianti ad un ingresso qualunque



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Ingresso | Uscita



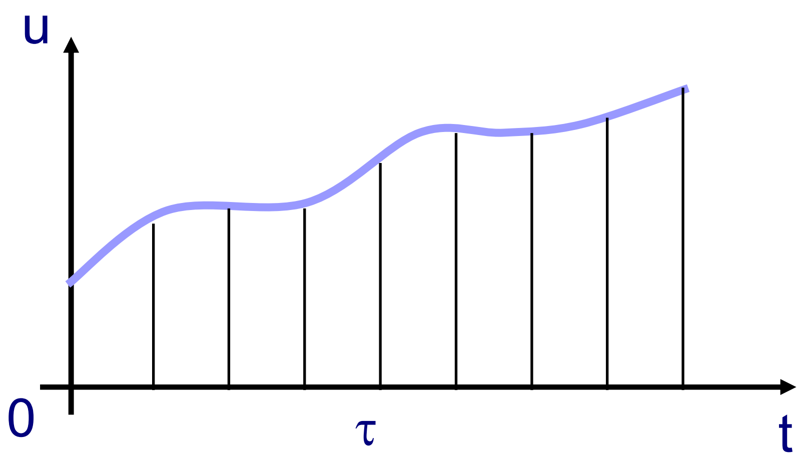
$$p = 0 \qquad t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

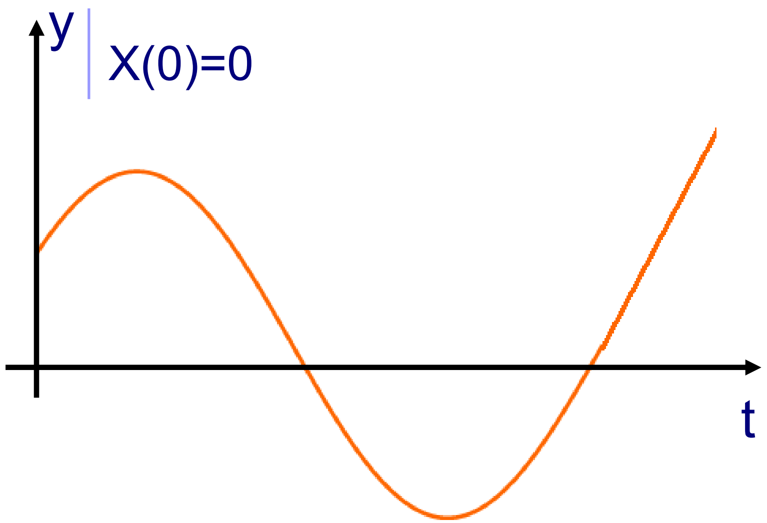
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Nei circuiti lineari l'effetto è proporzionale alla causa

Se $p = \frac{d}{dt} u$ Allora $h = \frac{d}{dt} s$

Conseguenza





Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- La generica forma d'onda *u* viene campionata da una successione di impulsi unitari

- All'istante τ si ha:

$$u(\tau) \longrightarrow \underset{\text{ingresso}}{p(t-\tau)u(\tau)} \longrightarrow \underset{\text{uscita}}{h(t-\tau)u(\tau)}$$

- La risposta del circuito con stato zero all'istante t è data dall'integrale di convoluzione degli impulsi applicati in (0, t)

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad X(0)=0$$

Circuiti lineari tempo invarianti del primo ordine a risposta impulsiva

La continuità della variabile di stato è violata dalla topologia del circuito

Condizione necessaria

- Insieme di taglio costituito da soli induttore e generatori di corrente

  $\longrightarrow$ Tensione impulsiva ai capi dell'induttore

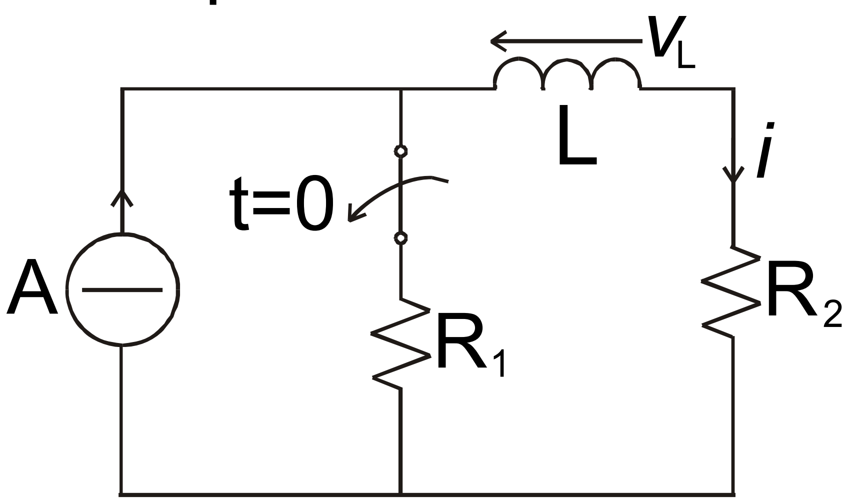
oppure

- Maglia costituita da soli da soli condensatore e generatore di tensione

  $\longrightarrow$ Corrente impulsiva ai capi del condensatore

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

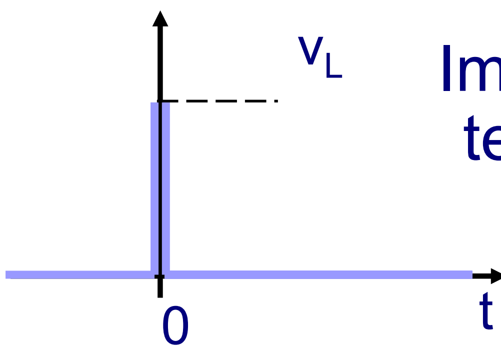
- Esempio



Variabile di stato *i*

$$i(0^-)=\frac{AR_1}{R_1+R_2}\ ,\ i(0^+)=A\neq i(0^-)$$

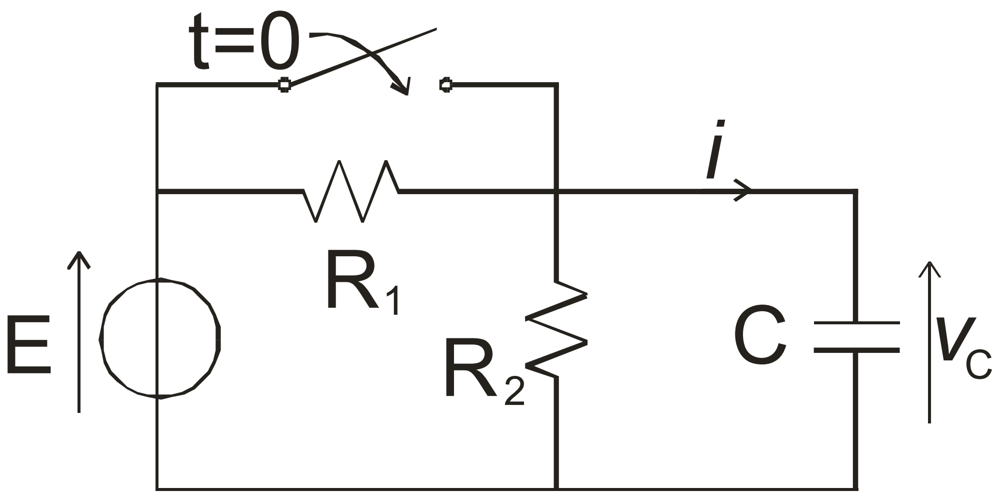
$$v_L(t)=LDi=\frac{LAR_2}{R_1+R_2}\delta(t)$$



Impulso di tensione

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

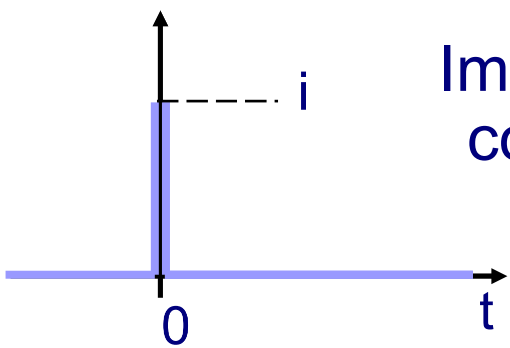
- Esempio



Variabile di stato v_C

$$v_C\left(0^-\right) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad v_C\left(0^+\right) = E \neq v_C\left(0^-\right)$$

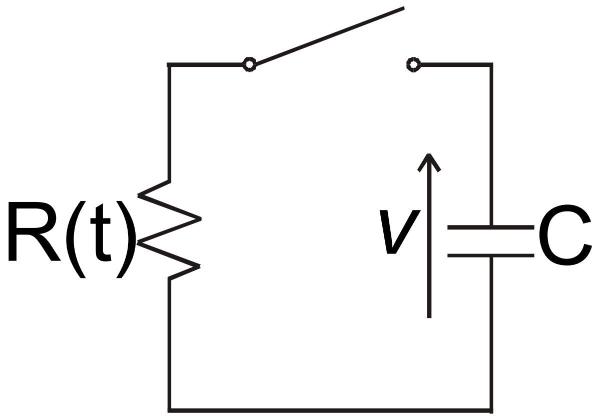
$$i(t) = CDv = \frac{CER_1}{R_1 + R_2}\delta(t)$$



Impulso di corrente

Circuiti lineari a parametri tempo – varianti

- Esempio (senza generatore)



Dati:

$$C \quad , \quad R(t) = \frac{R_0}{1 + 0.5\cos t}$$

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-) = V_0$

Risoluzione con metodo classico

KCL $$c\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_0}(1 + 0.5\cos t) = 0$$

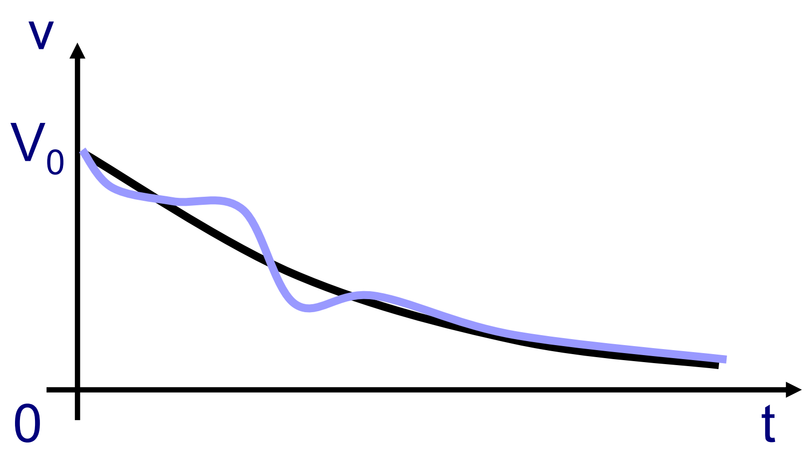
Circuiti lineari a parametri tempo – varianti

Per separazione delle variabili

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1+0.5\cos t}{R_0 C}dt$$

$$\ln v - \ln V_0 = -\frac{1}{R_0 C}\left(t + 0.5\operatorname{sen} t\right) = \ln\frac{v}{V_0}$$

$$v = V_0 e^{-\frac{1}{R_0 C}\left(t+0.5\operatorname{sen} t\right)}$$



Circuiti del secondo ordine in regime perturbato

- Due bipoli conservativi indipendenti
- Circuiti lineari a parametri tempo-invarianti
- Generatori di grandezze costanti nel tempo

METODO CLASSICO

Variabile	$a(t)$
Equazione risolvente	$A_2D^2a(t)+A_1Da(t)+A_0a(t)=cost$
Soluzione	$a(t)=a_{OM}(t)+a_{PART}(t)$

Equazione caratteristica associata alla differenziale

$A_2\alpha^2+A_1\alpha+A_0=0$ con $A_2,A_1,A_0>0$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

METODO CLASSICO

$$\alpha = -\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

dove

$$\beta = \frac{A_1}{2A_2}$$ fattore di smorzamento

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A_0}{A_2}}$$ pulsazione di risonanza

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$ fattore di qualità

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

SI DISTINGUONO QUATTRO CASI

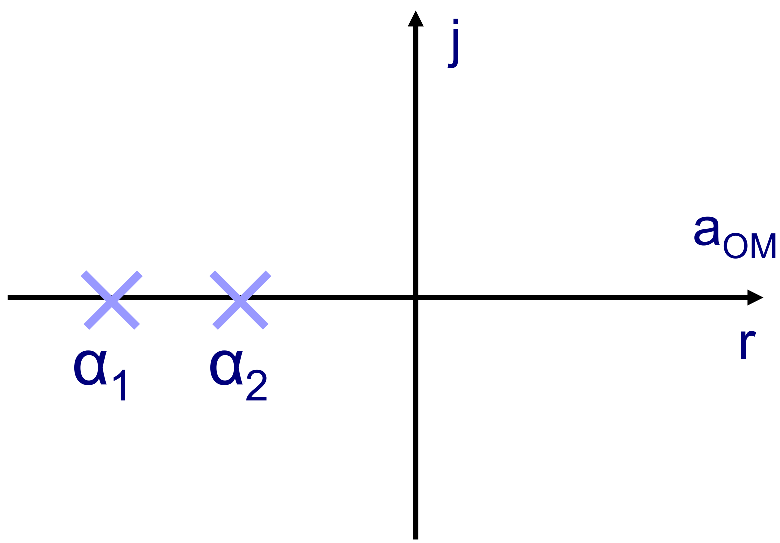
1. **$0<Q<1/2$, $\beta^2>\omega_0^2$**

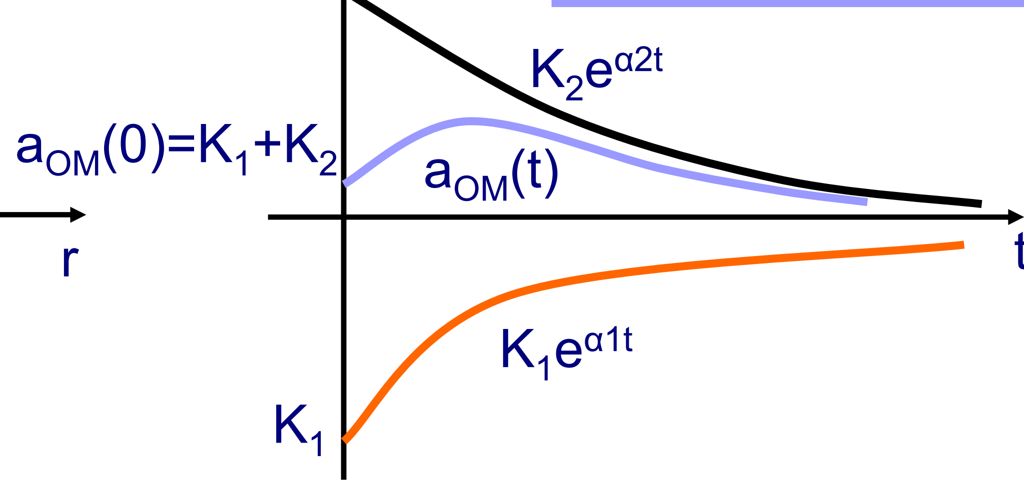
CASO SOVRASMORZATO

$\alpha_1=-\beta-\gamma$ $\alpha_2=-\beta+\gamma$ Radici reali,distinte, negative

(si è posto $\gamma=\sqrt{(\beta^2-\omega_0^2)}$)

$$a_{OM}(t)=K_1e^{\alpha_1 t}+K_2e^{\alpha_2 t}$$



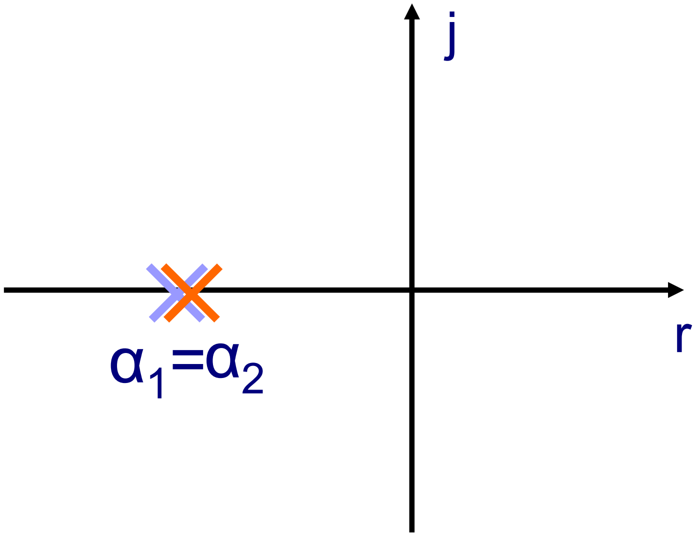


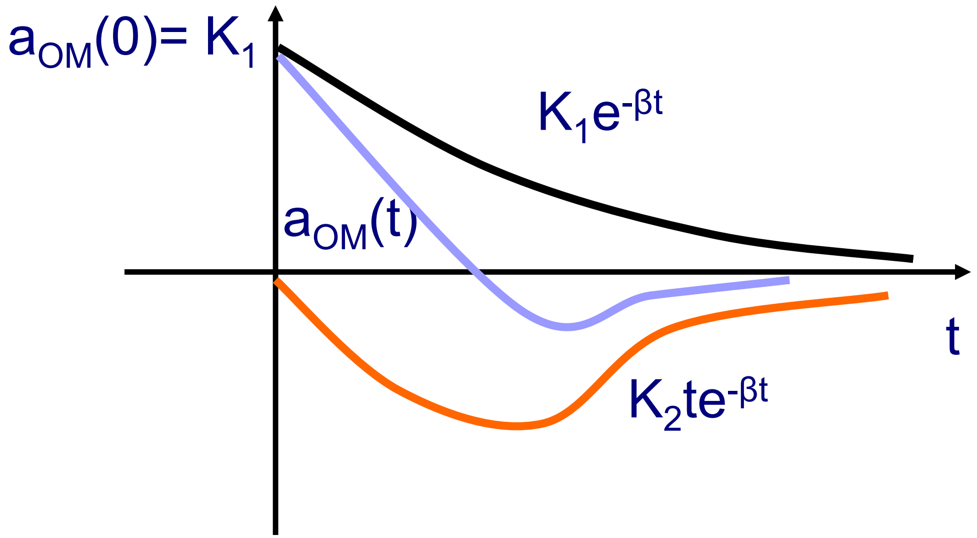
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

2. **$Q=1/2$, $\beta^2=\omega_0^2$**

CASO CON SMORZAMENTO CRITICO

$\alpha_1=-\beta$ $\alpha_2=-\beta$ Radici reali,coincidenti,negative





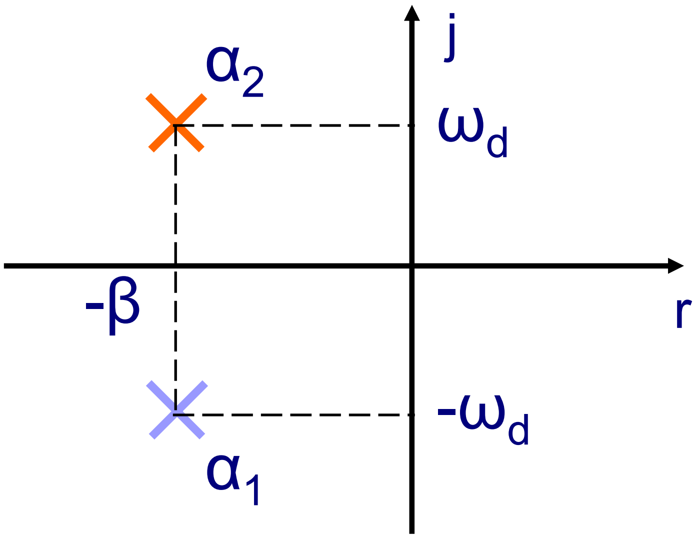
$$\boxed{a_{OM}(t)=K_1e^{-\beta t}+K_2te^{-\beta t}}$$

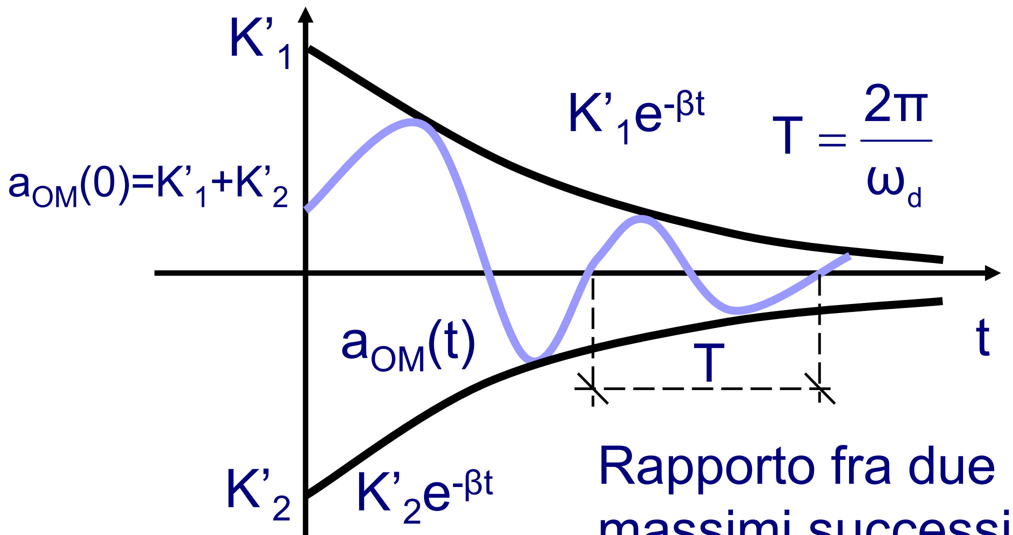
3. **Q>1/2 , $\beta^2<\omega_0^2$**

CASO SOTTOSMORZATO

$\alpha_1=-\beta-j\omega_d$ $\alpha_2=-\beta+j\omega_d$ con $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}<\omega_0$

Radici complesse coniugate con parte reale negativa





Rapporto fra due massimi successivi $e^{-\beta T}$

$$a_{OM}(t)=K'_1e^{\alpha_1 t}+K'_2e^{\alpha_2 t}=e^{-\beta t}(K_1\cos\omega_d t+K_2\mathrm{sen}\,\omega_d t)$$
$$=Ke^{-\beta t}\cos(\omega_d t+\vartheta)$$

CISOIDE

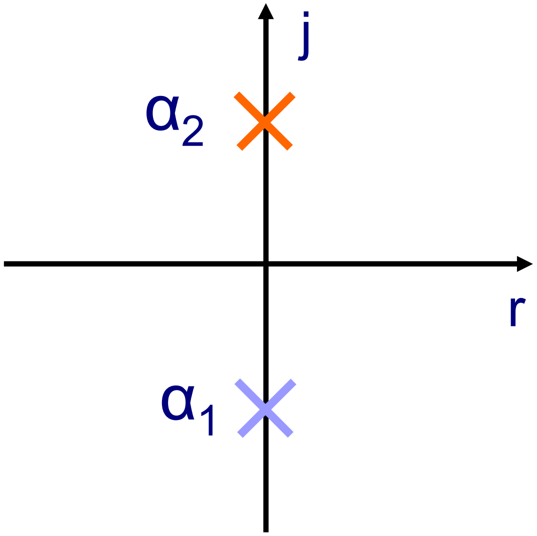
Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

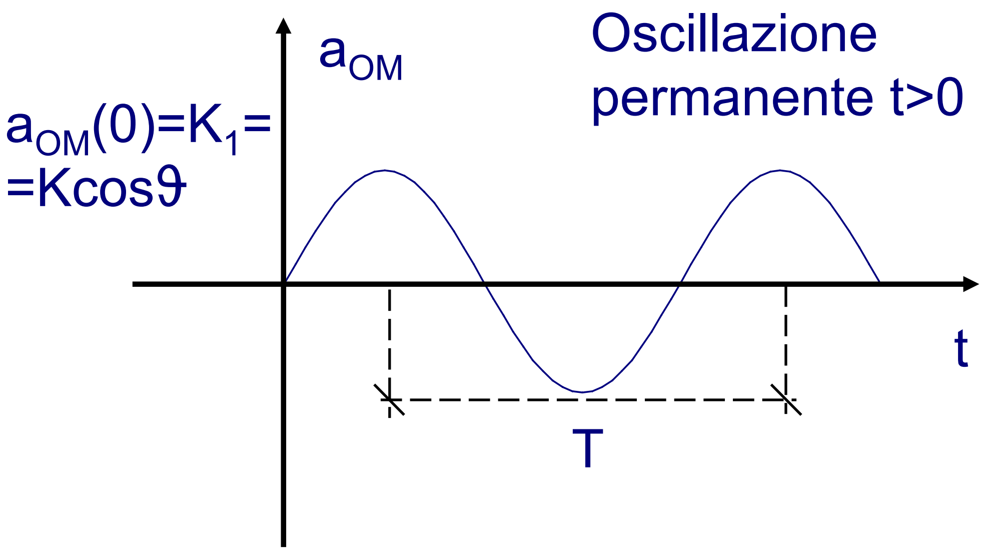
4. $Q \rightarrow \infty$, $\beta^2=0$

CASO NON SMORZATO

$\alpha_1=-j\omega_0$ $\alpha_2=j\omega_0$

Radici complesse coniugate con parte reale nulla

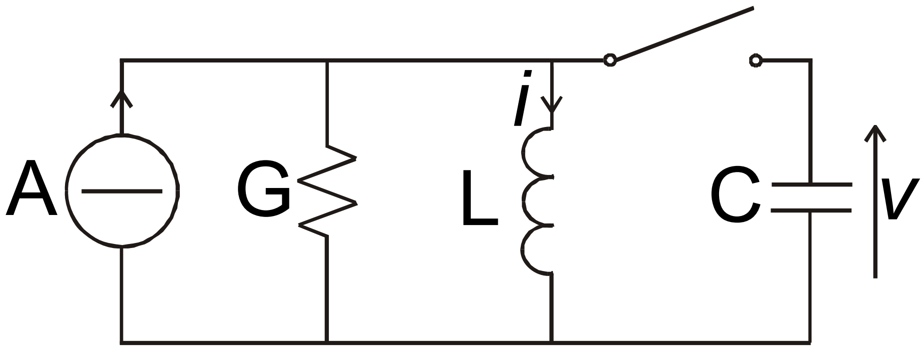




$$a_{OM}(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2 \mathrm{sen}\,\omega_0 t=K\cos(\omega_0 t+\vartheta)$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio di circuito del secondo ordine



Dati: A,G,L,C

t=0 chiusura interruttore

$v(0^-)=V_0 \qquad i(0^-)=A$

METODO CLASSICO

Variabile *v*

Metodo di analisi: **Potenziali di nodo**

KCL $\quad CDv + Gv + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt = A$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio di circuito del secondo ordine

$$CDv + Gv + \frac{D^{-1}}{L}v + i(0^-) = A$$

$$LCD^2v + LGDv + v = 0$$

Soluzione :

$v = v_{OM}$

Equazione caratteristica

$$LC\alpha^2 + LG\alpha + 1 = 0$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

- Esempio di circuito del secondo ordine

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt' = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-} v dt' + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v dt' + \frac{1}{L}\int_{0+}^{t} v dt' =$$

$$= i(0^-) - \cancel{i(-\infty)} + \left[i(0^+) \cancel{- i(0^-)} \right] + \frac{1}{L} D^{-1} v =$$

$$i(-\infty) \equiv 0$$

$$i(0^+) \equiv i(0^-)$$

$$= i(0^-) + \frac{1}{L} D^{-1} v = i(t)$$

$$\alpha^2 + \frac{G}{C}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Frequenze caratteristiche o naturali

$$\alpha = -\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\beta = \frac{G}{2C}$$ Fattore di smorzamento

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ Frequenza di risonanza

Condizioni iniziali

Dati iniziali $v(0^-)=V_0$ $i(0^-)=A$

Valori iniziali $\left.\begin{array}{l} v(0^+)=V_0 \\ i(0^+)=A \end{array}\right\}$ per continuità

$$Dv(0^+) = \frac{A}{C} - \frac{Gv(0^+)}{C} - \frac{i(0^+)}{C} = -C^{-1}Gv(0^+)$$ KCL a $t=0^+$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

1. Caso sovrasmorzato

$$\alpha_1 = -\beta - \gamma \qquad \alpha_2 = -\beta + \gamma$$

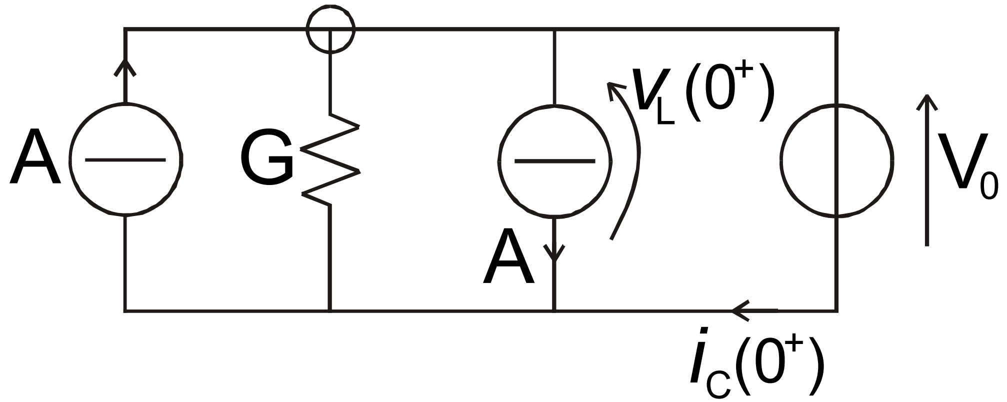
$$v = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$Dv = \alpha_1 K_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 K_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\begin{cases} v(0^+) = V_0 = K_1 + K_2 \\ Dv(0^+) = -\dfrac{GV_0}{C} = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \dfrac{\alpha_2 V_0 + G(V_0 / C)}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ K_2 = -\dfrac{\alpha_1 V_0 + G(V_0 / C)}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{cases}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

Circuito equivalente t=0$^+$

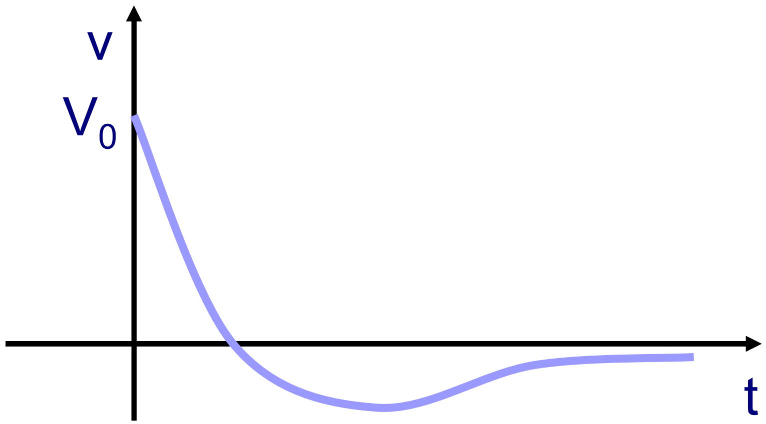


$v_L(0^+)=V_0$ $\longrightarrow$ $Di_L(0^+)=\dfrac{V_0}{L}$

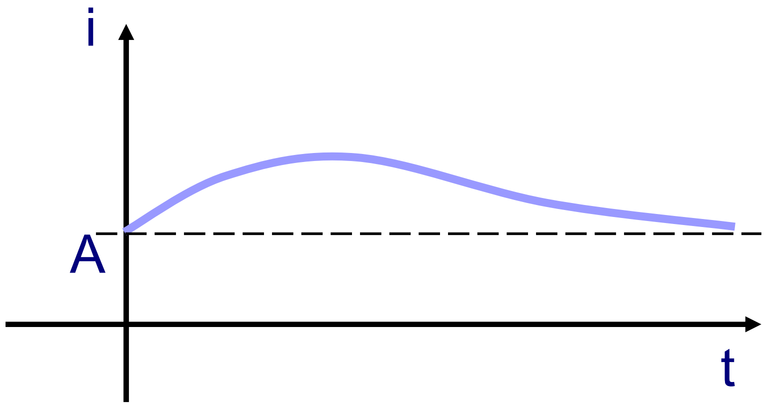
$$\begin{cases} i_c(0^+)=-GV_0 & \longrightarrow \quad Dv_L(0^+)=-\dfrac{G}{C}V_0 \\ -A+GV_0+A+i_C(0^+)=0 & \quad \text{KCL} \end{cases}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

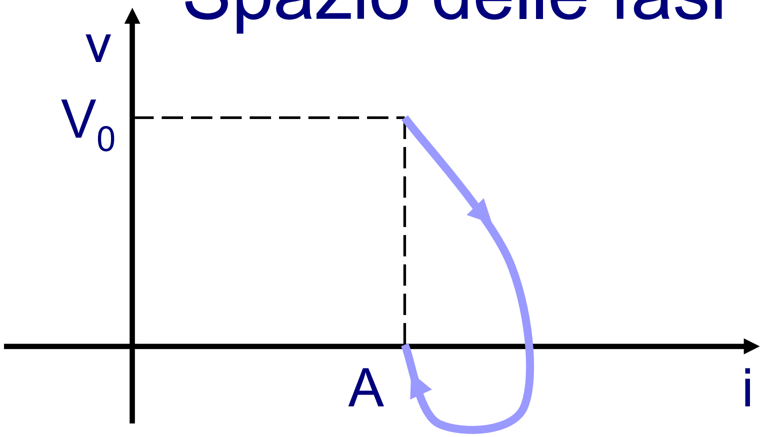
Condensatore



Induttore



Spazio delle fasi



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

2. Caso con smorzamento critico

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta$$

$$v = K_1 e^{-\beta t} + K_2 t e^{-\beta t}$$

$$Dv = -K_1 \beta e^{-\beta t} + K_2 e^{-\beta t} - K_2 \beta t e^{-\beta t}$$

$$\begin{cases} v(0^+) = V_0 = K_1 \\ Dv(0^+) = -\dfrac{GV_0}{C} = -K_1\beta + K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = V_0 \\ K_2 = V_0\left(\beta - \dfrac{G}{C}\right) \end{cases}$$

La rappresentazione grafica è analoga al caso 1)

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

3. Caso sottosmorzato

$$\alpha_1 = -\beta - j\omega_d \qquad \alpha_2 = -\beta + j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$v = Ke^{-\beta t}\cos(\omega_d t + \vartheta)$$

$$Dv = -K\beta e^{-\beta t}\cos(\omega_d t + \vartheta) - K\omega_d e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega_d t + \vartheta)$$

$$\begin{cases} v(0^+) = V_0 = K\cos\vartheta \\ Dv(0^+) = -\dfrac{GV_0}{C} = -K\beta\cos\vartheta - K\omega_d\,\mathrm{sen}\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = V_0\sqrt{1 + \left(\dfrac{G}{\omega_d C} - \dfrac{\beta}{\omega_d}\right)^2} \\ \vartheta = \mathrm{ar}\cos\left(\dfrac{V_0}{K}\right) \end{cases}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

$$\cos\vartheta = \frac{V_0}{K} \longleftarrow v(0^+)$$

$$\mathrm{sen}\vartheta = \frac{GV_0}{K\omega_d C} - \frac{\beta V_0}{K\omega_d} \longleftarrow Dv(0^+)$$

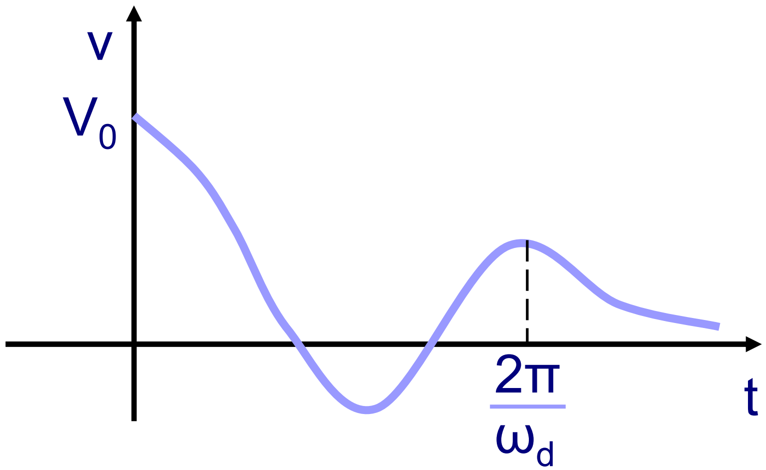
$$\left(\frac{V_0}{K}\right)^2 + \left(\frac{GV_0}{K\omega_d C} - \frac{\beta V_0}{K\omega_d}\right)^2 = 1$$

$$K^2 = V_0^2 + V_0^2\left(\frac{G}{\omega_d C} - \frac{\beta}{\omega_d}\right)^2$$

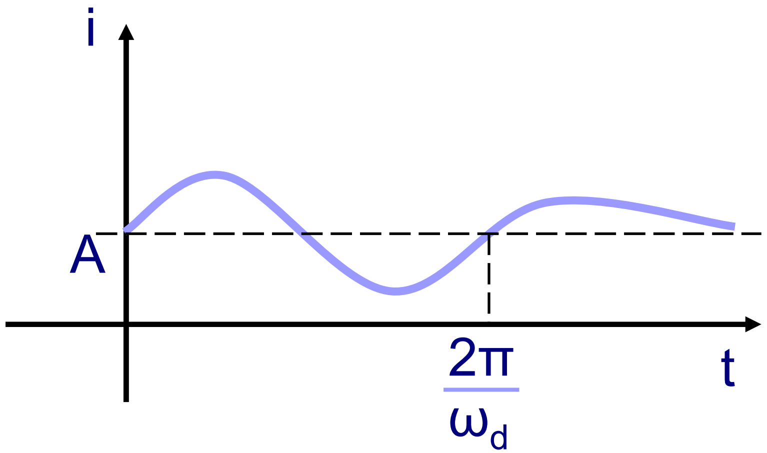
$$|K| = V_0\sqrt{1 + \left(\frac{G}{\omega_d C} - \frac{\beta}{\omega_d}\right)^2}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

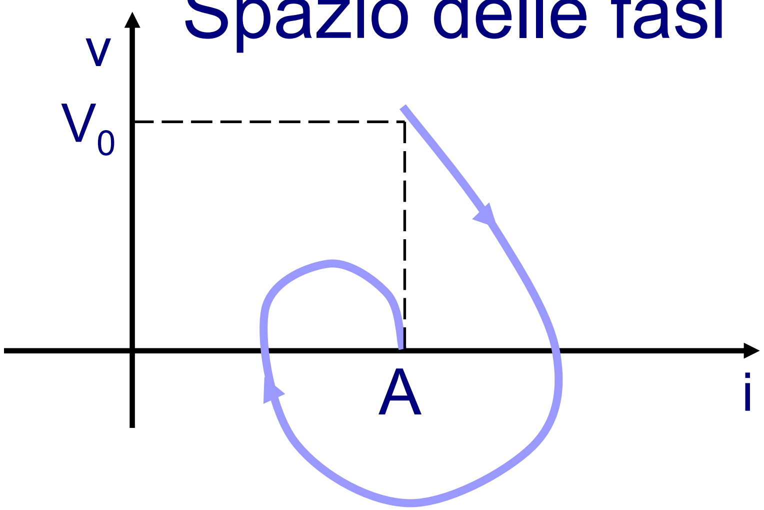
Condensatore



Induttore



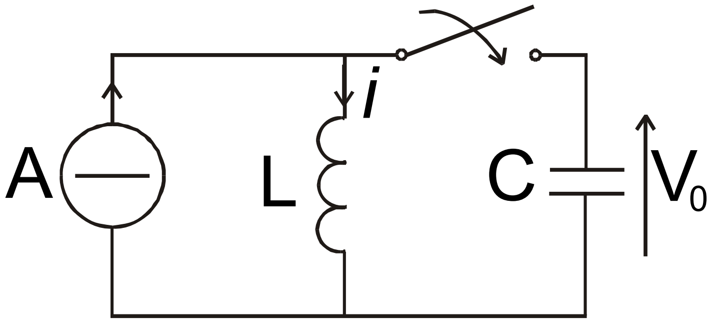
Spazio delle fasi



Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

4. Caso non smorzato

$$\beta^2 = \frac{G}{2C} = 0 \longrightarrow G = 0$$



$$\alpha_1 = -j\omega_0 \qquad \alpha_2 = j\omega_0$$

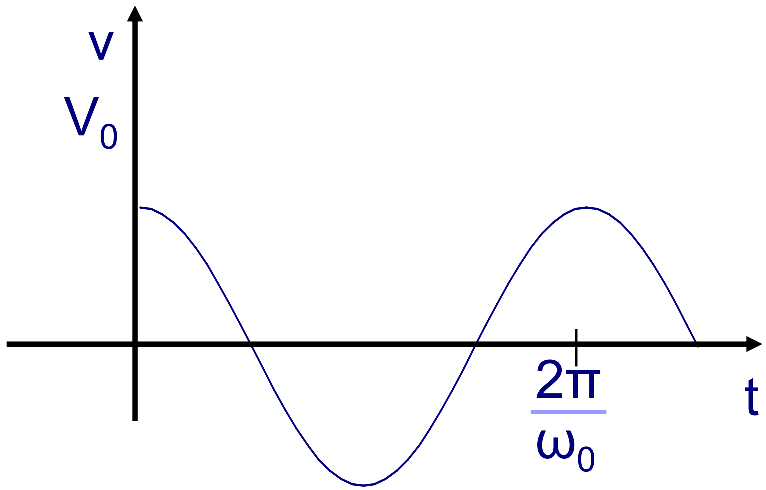
$$v = K\cos(\omega_0 t + \vartheta)$$

$$Dv = -K\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \vartheta)$$

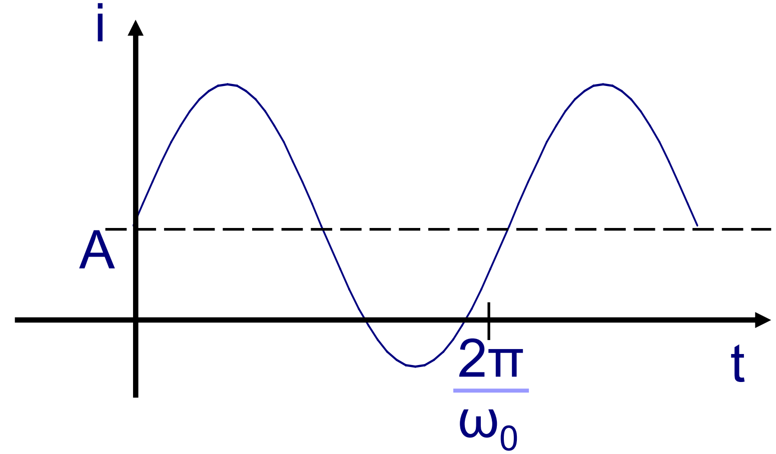
$$\begin{cases} v(0^+) = V_0 = K\cos\vartheta \\ Dv(0^+) = -\dfrac{GV_0}{C} = -K\omega_0 \mathrm{sen}\,\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = V_0 \\ \vartheta = 0 \end{cases}$$

Circuiti elettrici in funzionamento perturbato

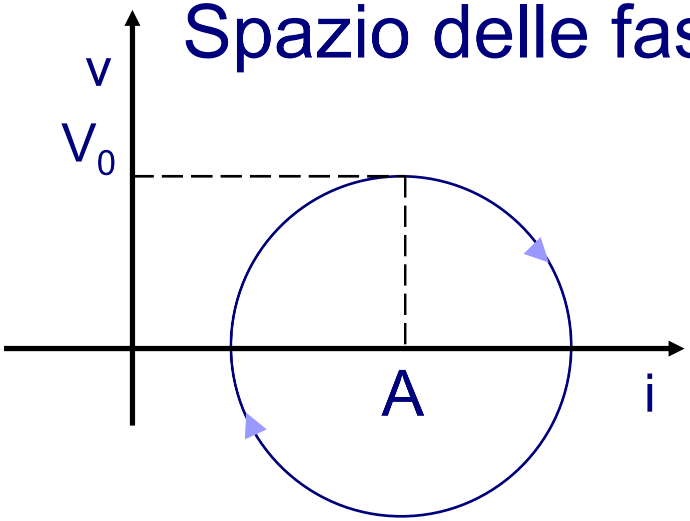
Condensatore



Induttore



Spazio delle fasi



$$v = V_0 \cos \omega_0 t$$

$$i = CV_0\omega_0 \mathrm{sen}\,\omega_0 t + A$$

$$\left(\frac{i - A}{CV_0\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{V_0}\right)^2 = 1$$

$C\omega_0 = 1$ ← Circonferenza

$C\omega_0 \neq 1$ ← Ellisse