



Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corsi di Elettrotecnica e Teoria dei Circuiti

Doppi Bipoli

Doppio bipolo

■ Che cos'è?

E' un dispositivo con due porte di scambio della potenza elettrica

(Porta = coppia di morsetti attraversati da corrente uguale ed opposta)



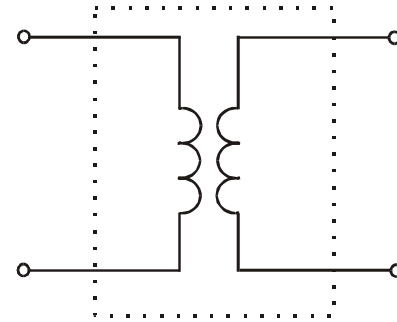
Porta di ingresso 1-1'

Porta di uscita 2-2'

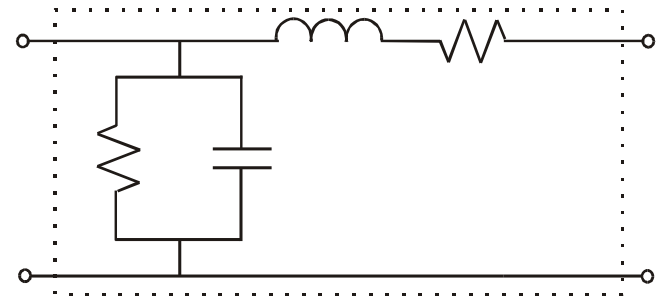
Doppio bipolo

■ Esempi

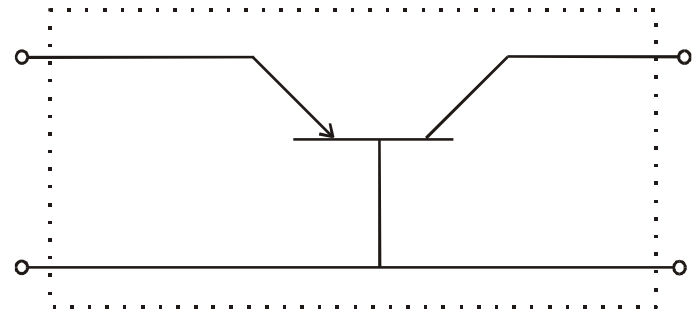
Mutuo induttore
Trasformatore



Linea elettrica



Transistore



Doppio bipolo

■ Descrizione

Regime di funzionamento:

- Stazionario
- P.A.S.
- Variabile

Caratteristica del D.B.:

- Attivo, passivo
- Lineare, non lineare
- Tempo (in)variante



Doppio bipolo

D.B. lineare, passivo e tempo-invariante in regime P.A.S.



$(\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1)$ alla porta 1
 $(\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2)$ alla porta 2

Il D.B. impone due relazioni fra le quattro variabili

Variabili indipendenti

2

Casi possibili

6

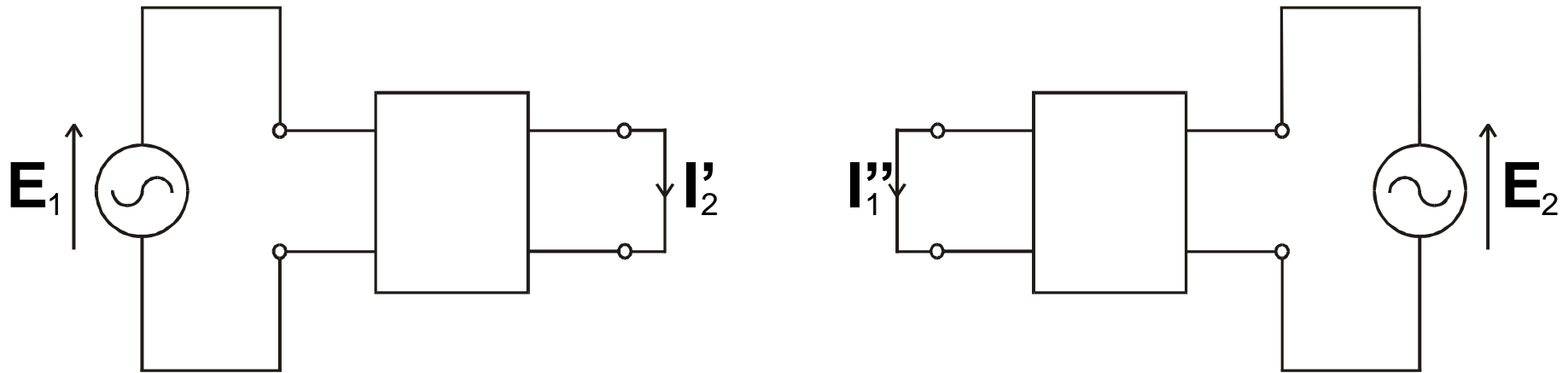
1. $(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2)$
2. $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$
3. $(\mathbf{I}_1, \mathbf{V}_2)$
4. $(\mathbf{V}_2, \mathbf{I}_2)$
- ~~5. $(\mathbf{I}_2, \mathbf{V}_1)$~~
- ~~6. $(\mathbf{V}_1, \mathbf{I}_1)$~~

Duale di 3

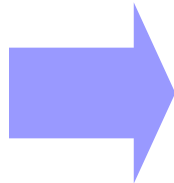
Duale di 4

Doppio bipolo

Un doppio bipolo (R,L,M,C) è **reciproco** se avviene che (1):



$$E_1 = E_2$$

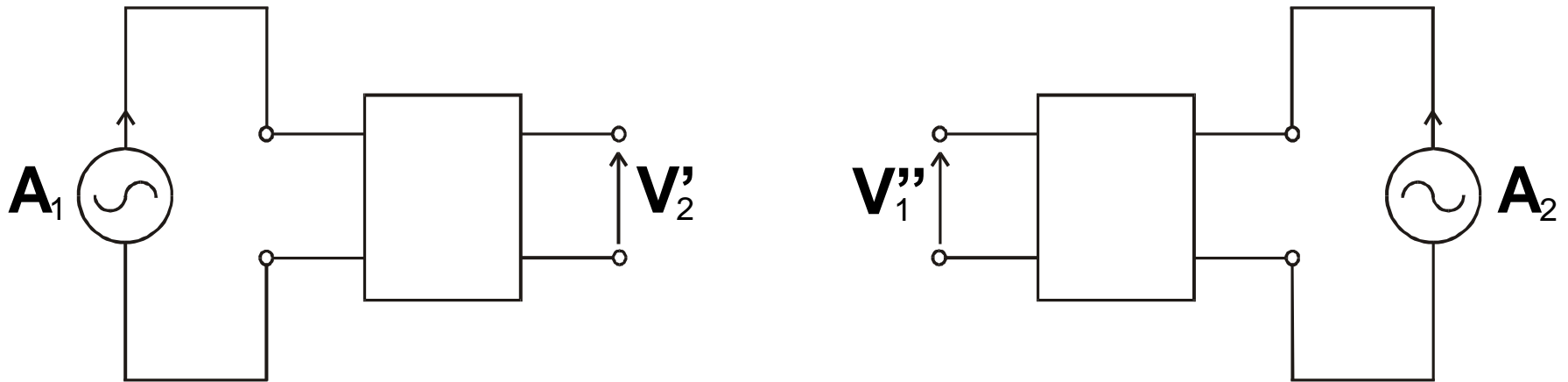


$$I_2' = I_1''$$

$$E_1 / I_2' = E_2 / I_1''$$

Doppio bipolo

Un doppio bipolo (R,L,M,C) è **reciproco** se avviene che (2):



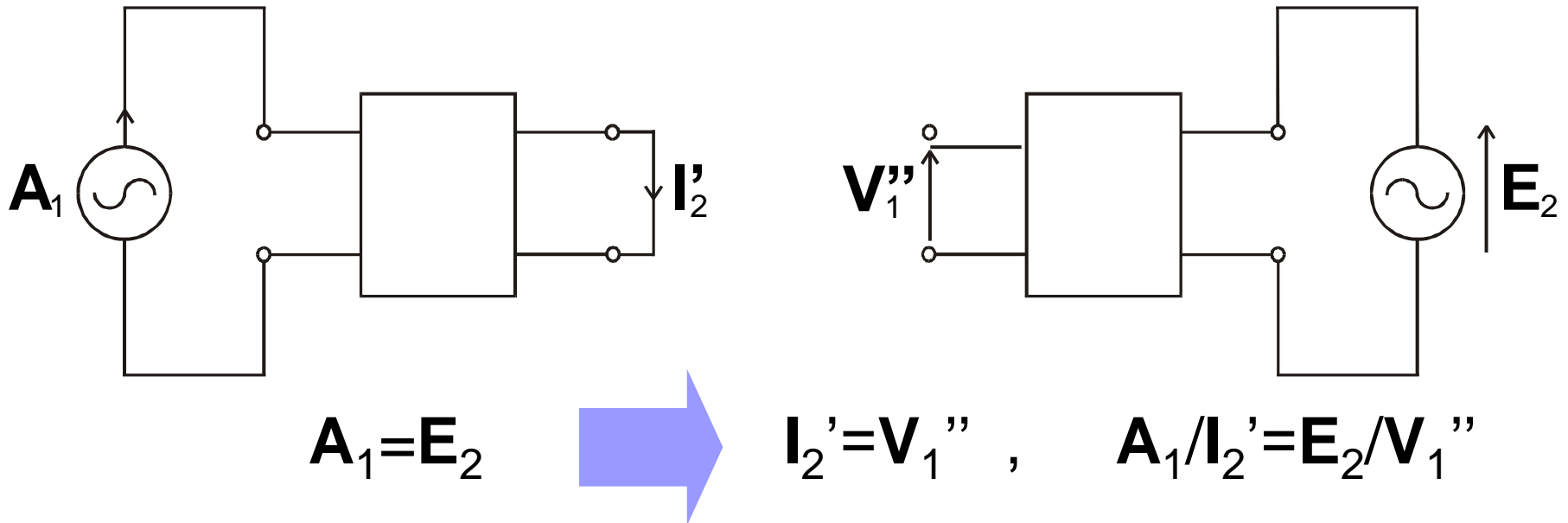
$$A_1 = A_2$$



$$V_2' = V_1'' \quad , \quad A_1/V_2' = A_2/V_1''$$

Doppio bipolo

Un doppio bipolo (R,L,M,C) è **reciproco** se avviene che (3):

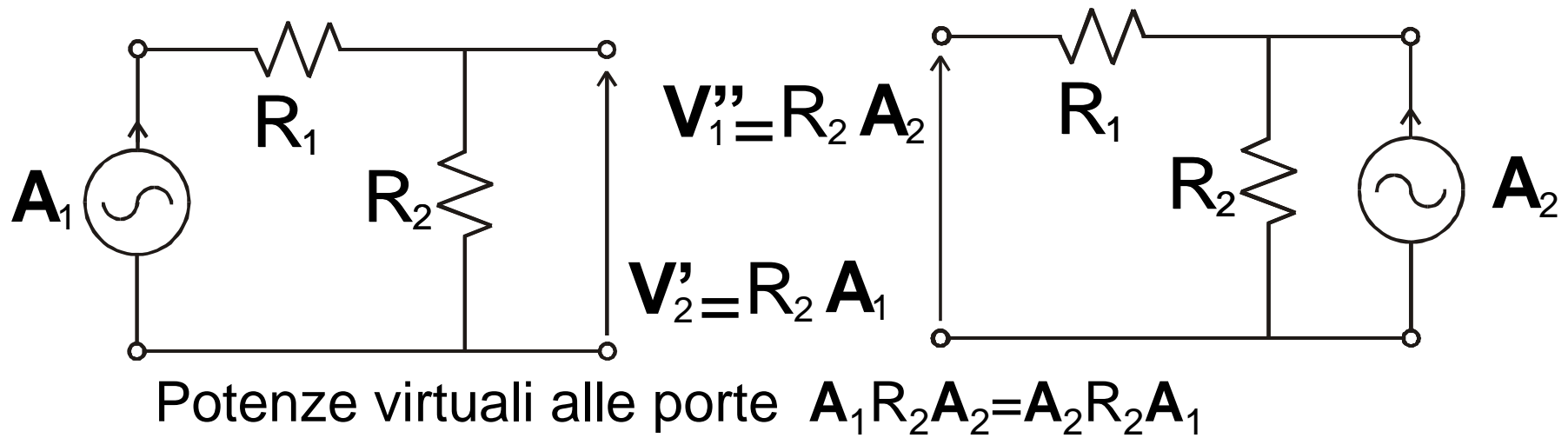
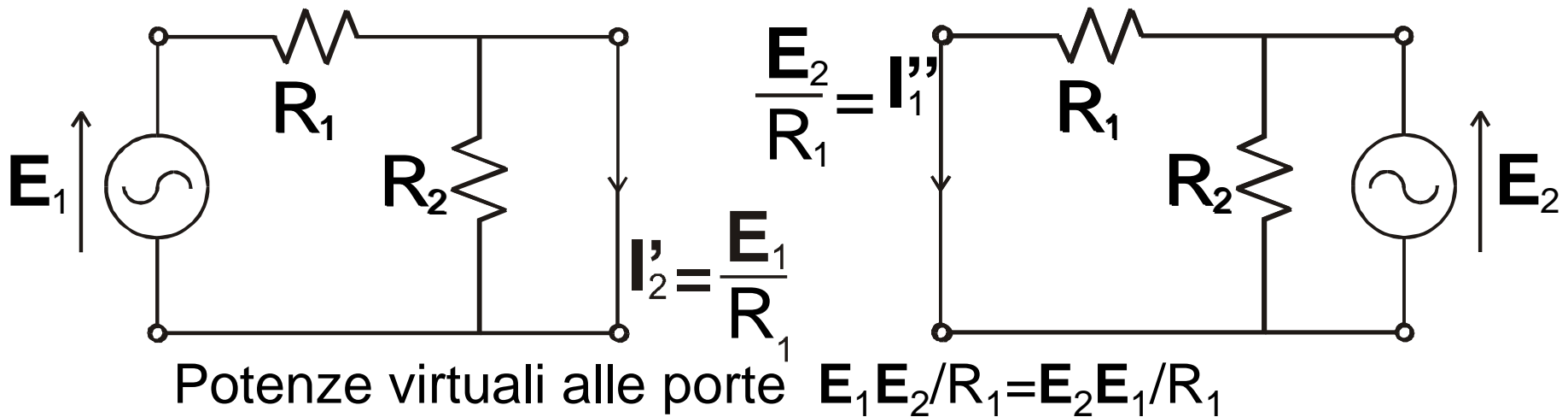


Scambiando ingresso e uscita il comportamento del D.B. non cambia



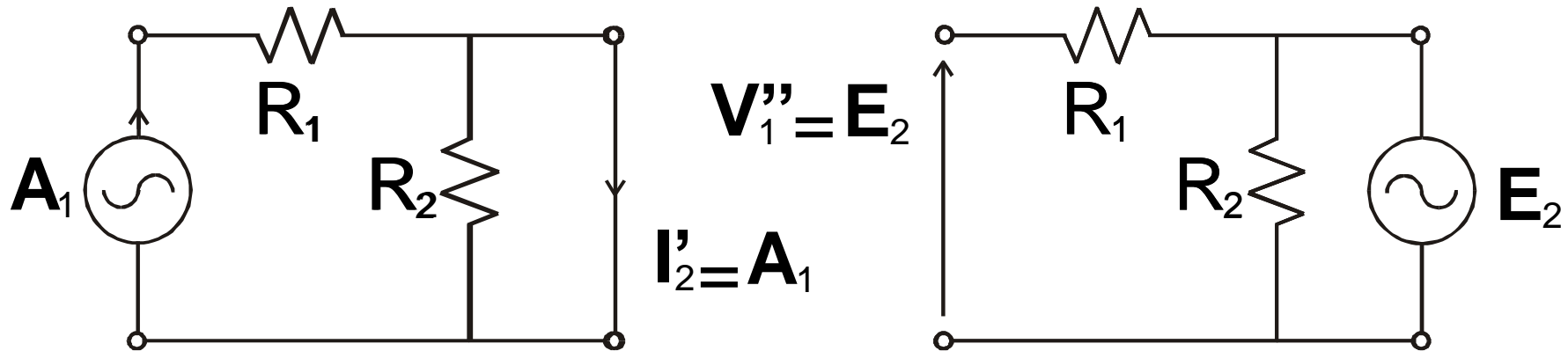
Doppio bipolo

■ Esempio (1)



Doppio bipolo

■ Esempio (2)



Potenze virtuali alle porte $A_1 E_2 = E_2 A_1$

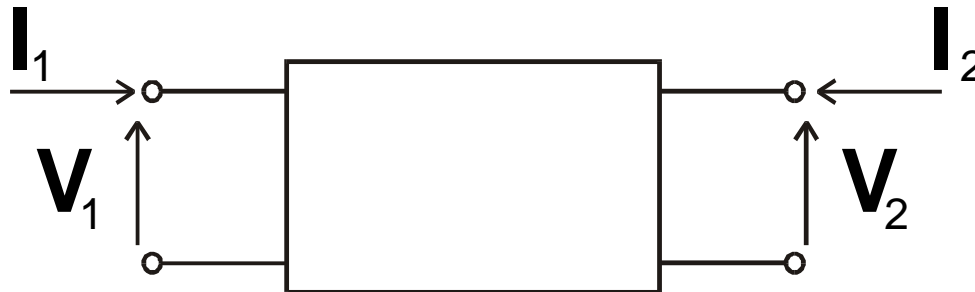
Le tre proprietà sono verificate

Il **teorema di Tellegen** per potenze virtuali consente la dimostrazione del **teorema di reciprocità**

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Z

Le variabili indipendenti sono: I_1, I_2

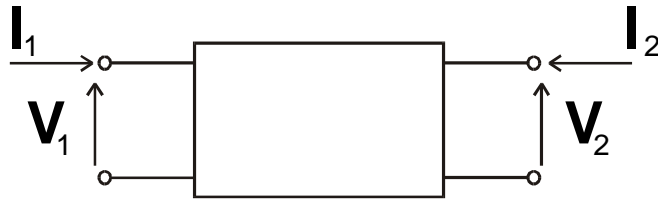


$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Z



$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$Z_{11} = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0}$$

Impedenza propria alla porta 1 con 2 aperta

$$Z_{22} = \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0}$$

Impedenza propria alla porta 2 con 1 aperta

$$Z_{12} = \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0}$$

Impedenza di trasferimento fra 1 e 2

$$Z_{21} = \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0}$$

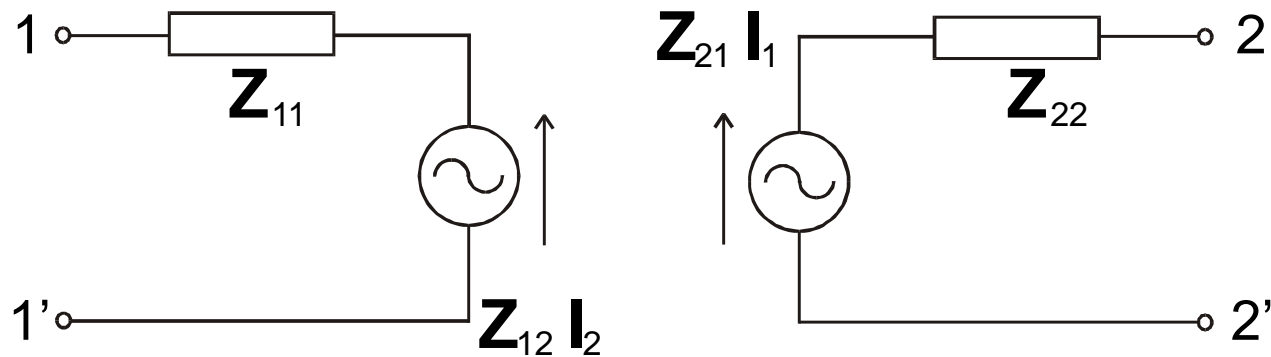
Impedenza di trasferimento fra 2 e 1

Si nota che tutti i parametri Z sono definiti a vuoto

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Z

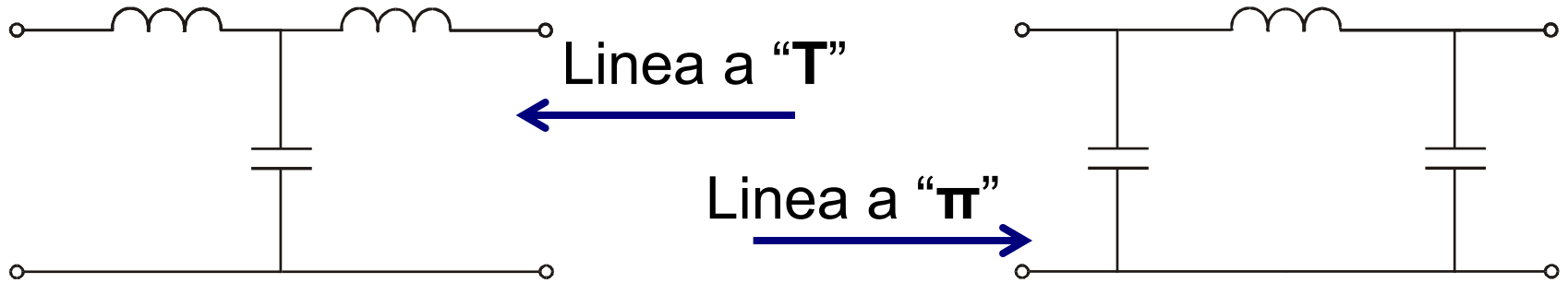
Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:



É caratterizzato da due generatori ideali di tensione comandati da corrente

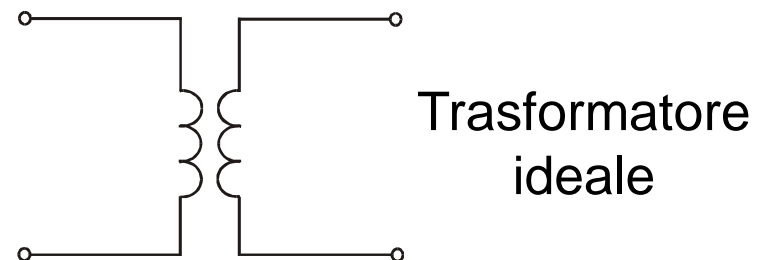
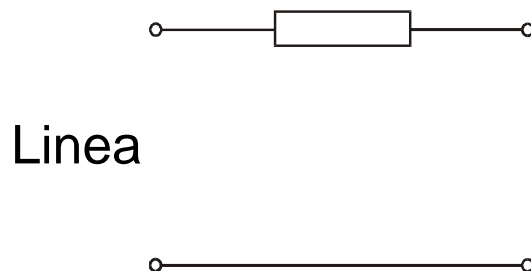
Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Z



Se il D.B. è passivo e $Z_{12}=Z_{21}$  Il D.B. è **RECIPROCO**

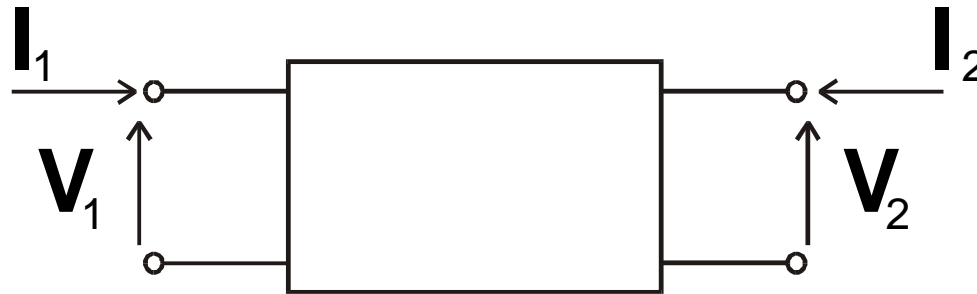
Alcuni circuiti non ammettono la descrizione con parametri Z, ad esempio:



Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Y

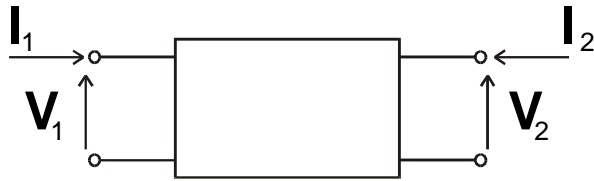
Le variabili indipendenti sono: \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2



$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}_{11} \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{Y}_{21} \mathbf{V}_1 + \mathbf{Y}_{22} \mathbf{V}_2$$

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Y



$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned}$$

$$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0}$$

$$Y_{22} = \left(\frac{I_2}{V_2} \right)_{V_1=0}$$

$$Y_{12} = \left(\frac{I_1}{V_2} \right)_{V_1=0}$$

$$Y_{21} = \left(\frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0}$$

Ammettenza propria alla porta 1
con la porta 2 in corto circuito

Ammettenza propria alla porta 2
con la porta 1 in corto circuito

Ammettenza di trasferimento fra porta 1 e 2

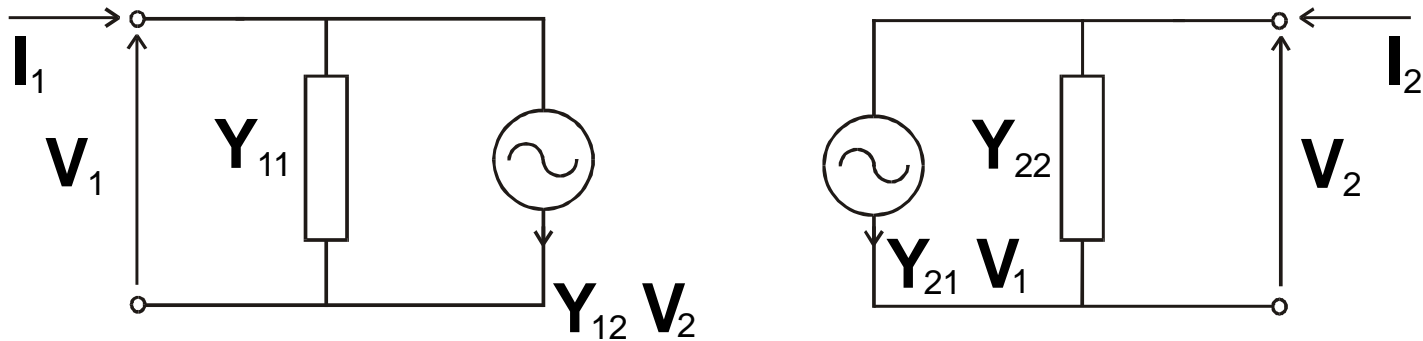
Ammettenza di trasferimento fra porta 2 e 1

Si nota che tutti i parametri Y sono definiti in corto circuito

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Y

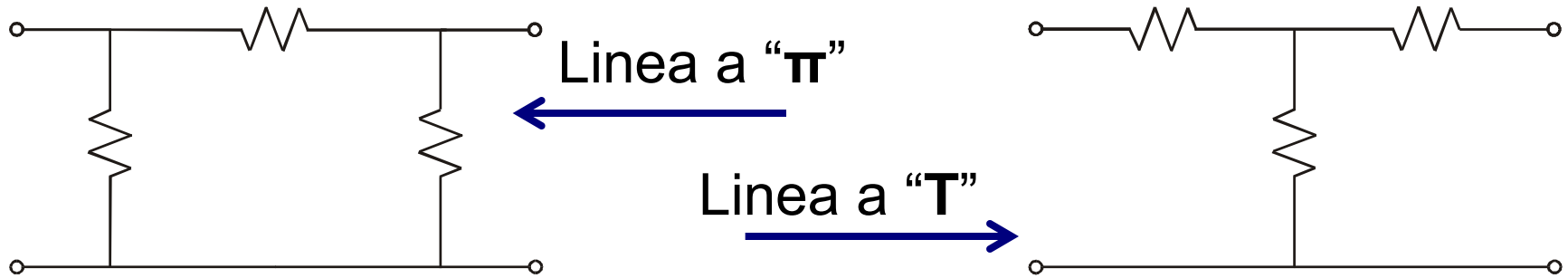
Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:



É caratterizzato da due generatori ideali di corrente comandati da tensione

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri Y

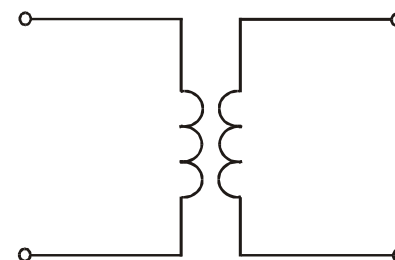
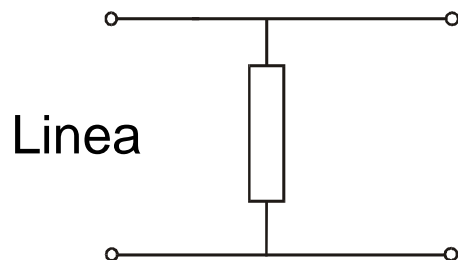


Se il D.B. è passivo e $Y_{12}=Y_{21}$



Il D.B. è **RECIPROCO**

Alcuni circuiti non ammettono la descrizione con parametri Y, ad esempio:

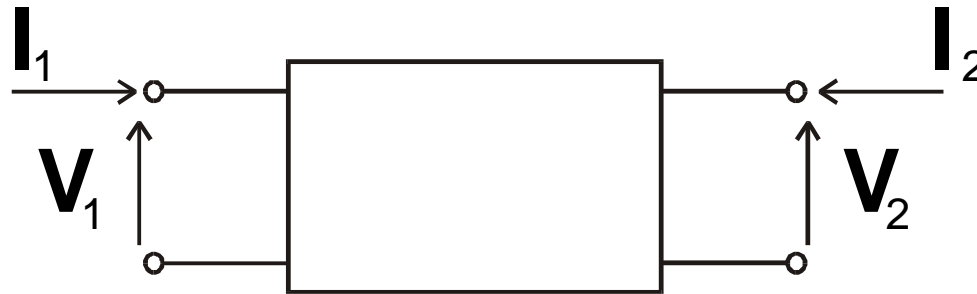


Trasformatore
ideale

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri H

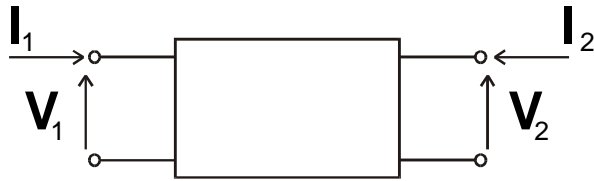
Le variabili indipendenti sono: \mathbf{I}_1 , \mathbf{V}_2



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12} \mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{V}_2$$

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri H



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{h}_{11} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{h}_{21} \mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22} \mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{h}_{11} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

Impedenza propria alla porta 1 con la porta 2 in corto circuito [Ω]

$$\mathbf{h}_{22} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{I}_1=0}$$

Ammetenza propria alla porta 2 con la porta 1 aperta [Ω^{-1}]

$$\mathbf{h}_{12} = \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \right)_{\mathbf{I}_1=0}$$

Funzione di trasferimento fra tensioni con la porta 1 aperta (adimensionale)

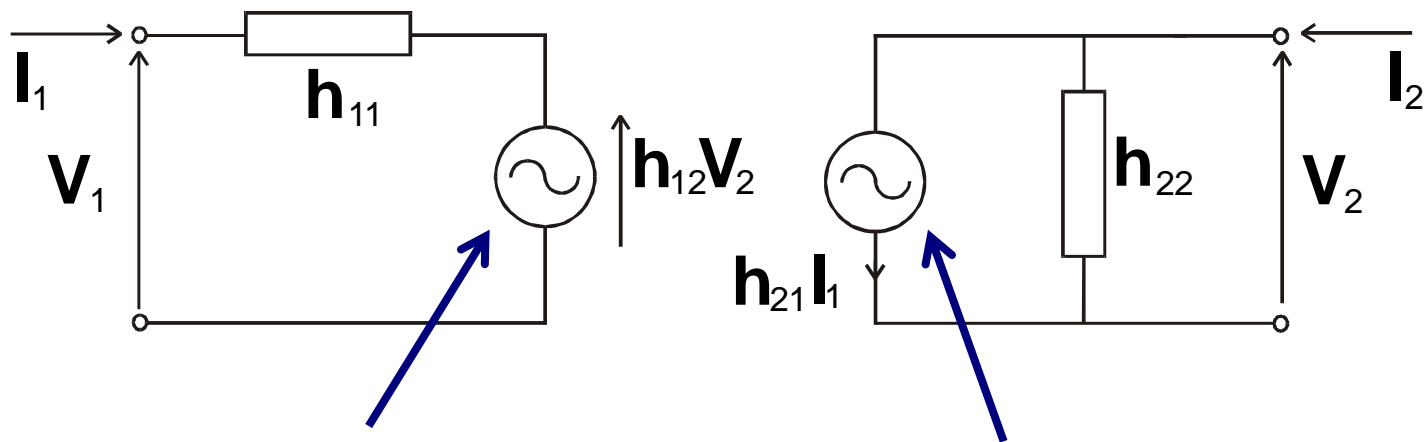
$$\mathbf{h}_{21} = \left(\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

Funzione di trasferimento fra correnti con la porta 2 in corto circuito (adimensionale)

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri H

Il circuito equivalente più generale (che soddisfa le equazioni scritte) risulta:



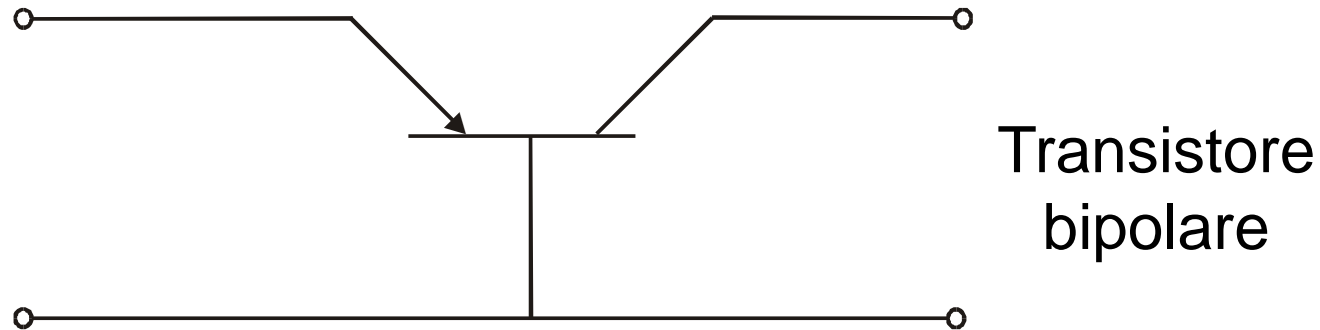
Generatore di tensione
comandato da tensione

Generatore di corrente
comandato da corrente

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri H

Esempio di doppio bipolo rappresentabile attraverso i parametri **H**



Se $h_{12} = -h_{21}$

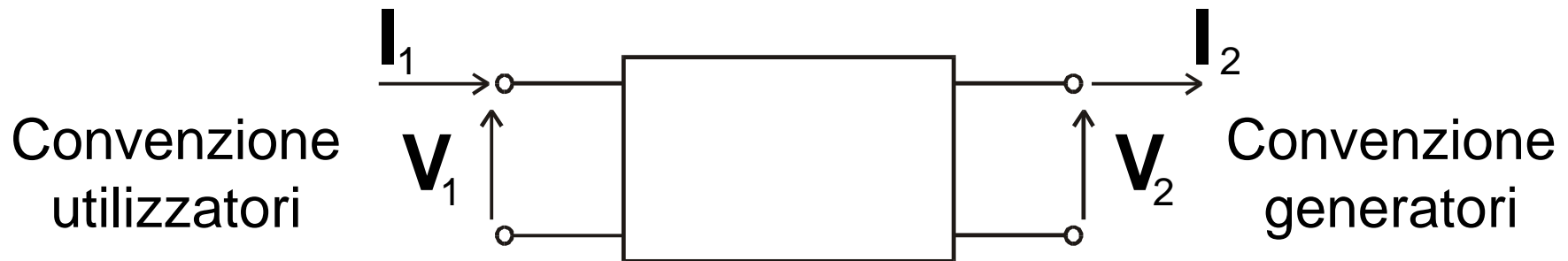


Il D.B. è **RECIPROCO**

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T

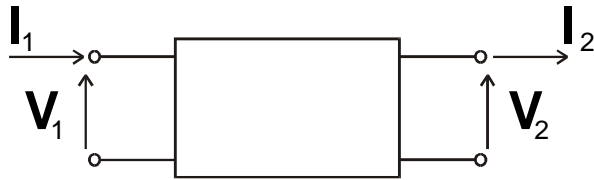
Le variabili indipendenti sono: V_2 , I_2



$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2 \\ I_1 &= CV_2 + DI_2 \end{aligned}$$

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{array} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

Impedenza di trasferimento con la porta 2 in corto circuito [Ω]

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{array} \right)_{\mathbf{I}_2=0}$$

Ammetenza di trasferimento con la porta 2 aperta [Ω^{-1}]

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{array} \right)_{\mathbf{I}_2=0}$$

Funzione di trasferimento fra tensioni con la porta 2 aperta (adimensionale)

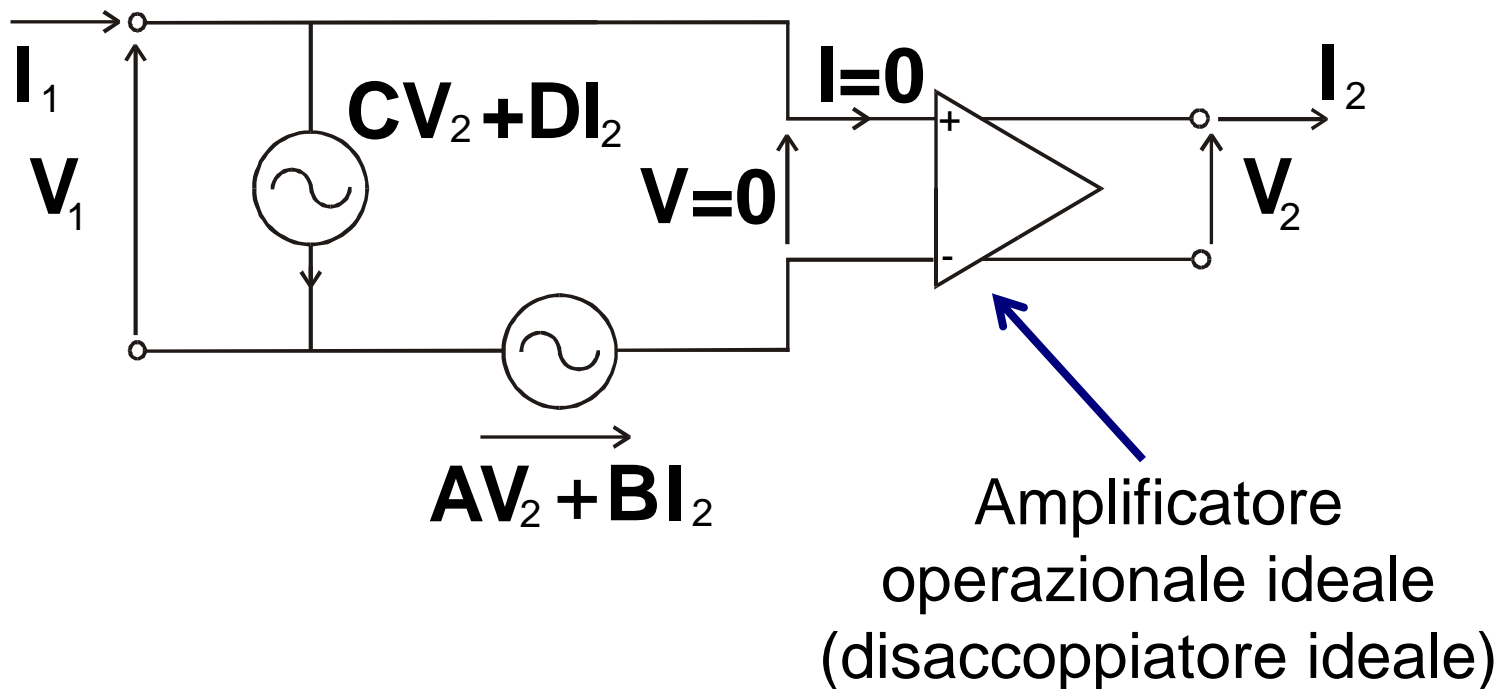
$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{array} \right)_{\mathbf{V}_2=0}$$

Funzione di trasferimento fra correnti con la porta 2 in corto circuito (adimensionale)

Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri ibridi T

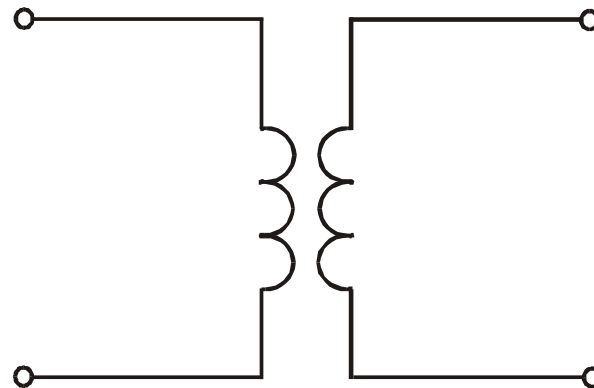
Il circuito equivalente più generale:



Doppio bipolo

■ Descrizione del D.B. con parametri T

Esempio di doppio bipolo rappresentabile attraverso i parametri ibridi **T**



Trasformatore ideale

Se $|\mathbf{AD} - \mathbf{BC}| = 1$



Il D.B. è **RECIPROCO**

Infatti, si calcola $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{B} - \mathbf{ADC}^{-1}$, $\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{C}^{-1}$ e si impone $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$



Doppio bipolo

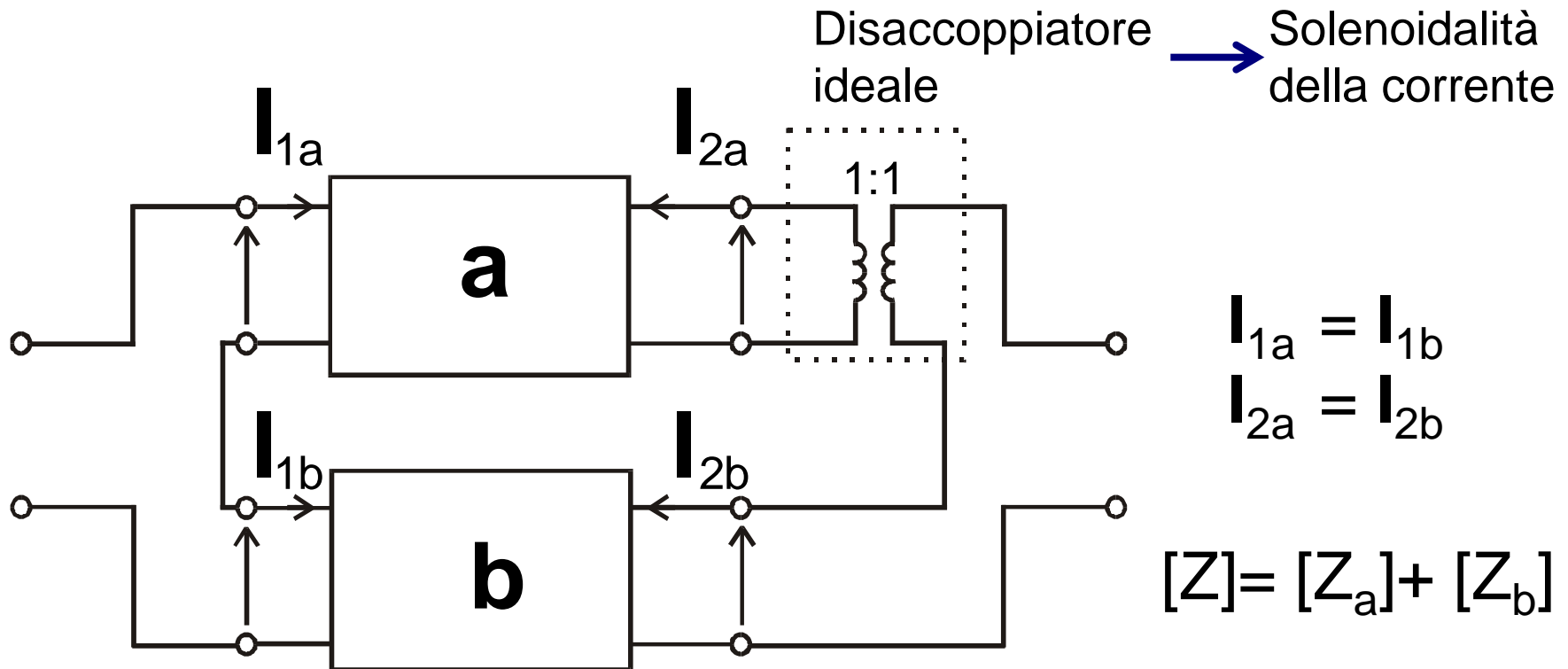
■ In generale:

- Dati quattro parametri di una descrizione, è possibile ricavare i corrispondenti parametri di un'altra descrizione dello stesso doppio bipolo per via analitica
- Un doppio bipolo ammette almeno una descrizione
- Un doppio bipolo può non ammettere tutte le descrizioni possibili

Doppio bipolo

■ Connessioni dei doppi bipoli:

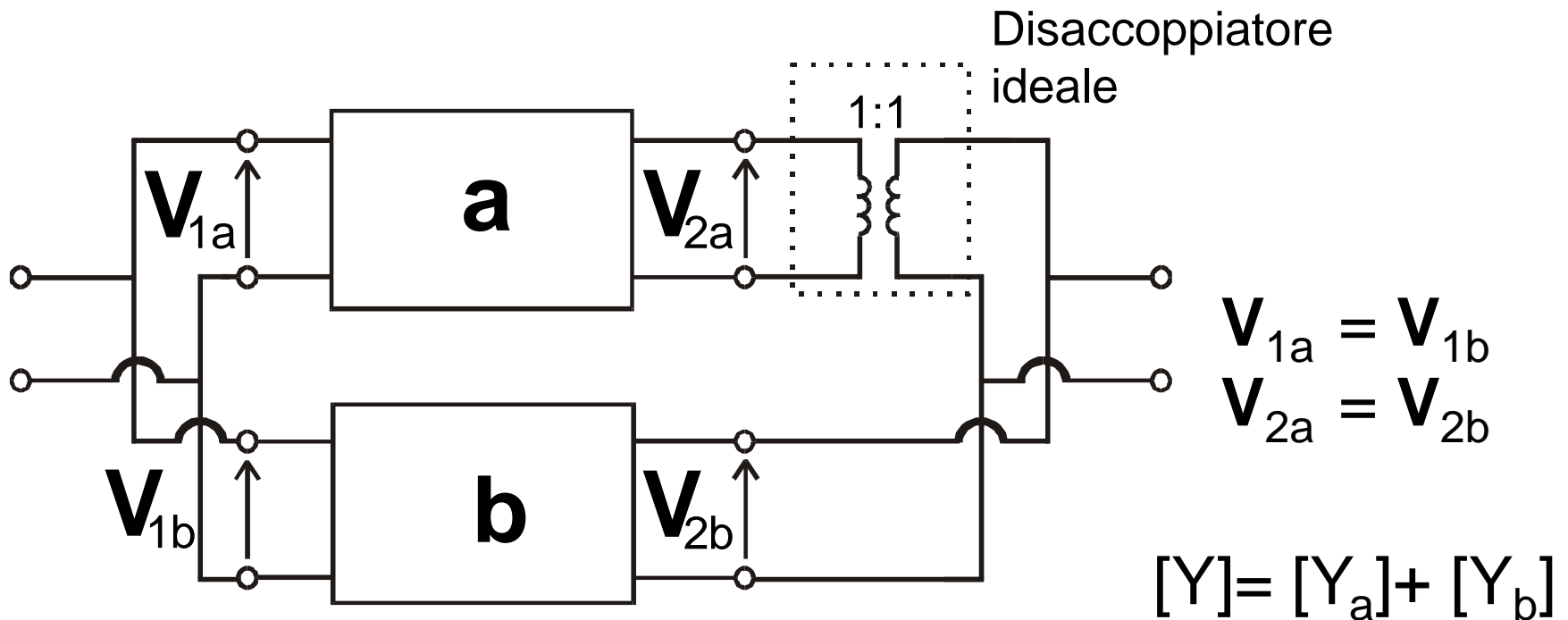
SERIE



Doppio bipolo

■ Connessioni dei doppi bipoli:

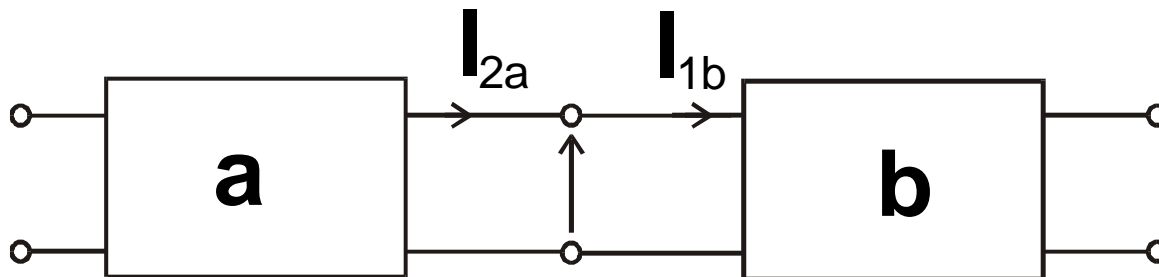
PARALLELO



Doppio bipolo

■ Connessioni dei doppi bipoli:

CASCATA



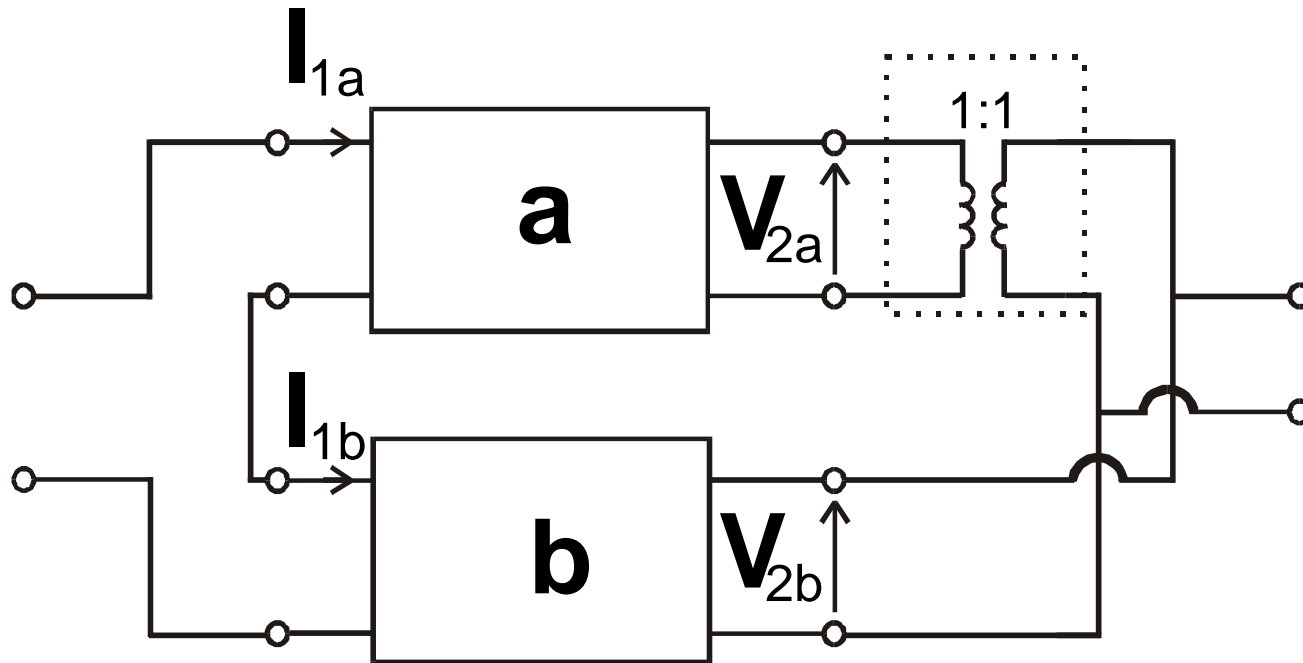
$$\begin{aligned} V_{2a} &= V_{1b} \\ I_{2a} &= I_{1b} \end{aligned}$$

$$[T] = [T_b] [T_a]$$

Doppio bipolo

■ Connessioni dei doppi bipoli:

SERIE - PARALLELO

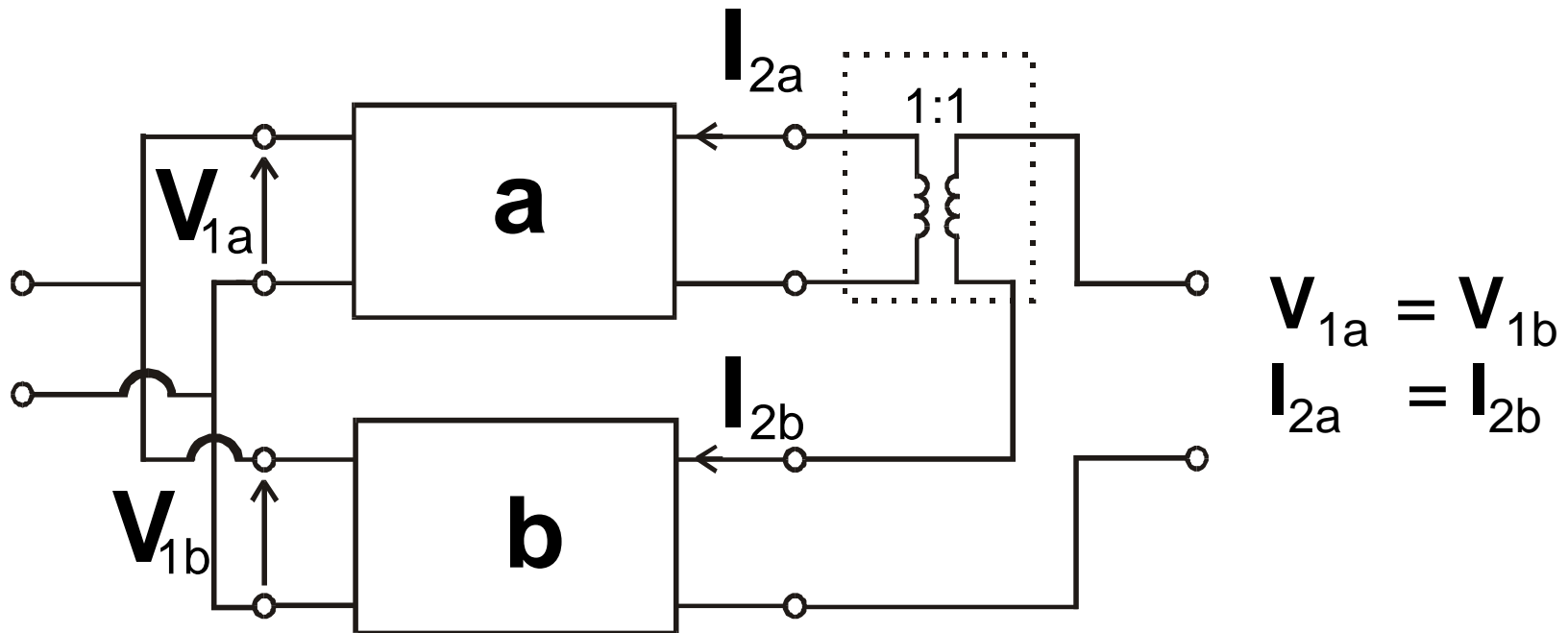


$$\begin{aligned} I_{1a} &= I_{1b} \\ V_{2a} &= V_{2b} \end{aligned}$$

Doppio bipolo

■ Connessioni dei doppi bipoli:

PARALLELO - SERIE





IL GIRATORE

Esempio di d.b. lineare, passivo, tempo invariante **non reciproco**

Presa la conv.ne utilizzatori alle porte, si ha

$$V_1 = \alpha I_2$$

$$V_2 = -\alpha I_1$$

con α (reale) rapporto di girazione

Per la **seconda proposizione del teorema di reciprocità** (corrente impressa in ingresso, tensione a vuoto in uscita): le tensioni a vuoto sono diverse, le potenze virtuali sono diverse (risultano α e $-\alpha$ se corrente unitaria).