Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Teoria dei Circuiti

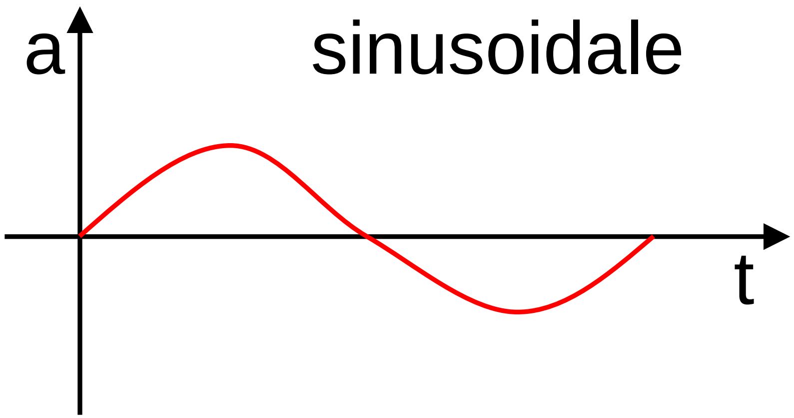
Regime P.A.S.

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

Regime P.A.S.

- **REGIME PERIODICO ALTERNATO SINUSOIDALE (P.A.S.)**

E' un caso particolare di regime variabile
Le grandezze elettriche (tensione, corrente) sono del tipo



Regime P.A.S.

- **REGIME PERIODICO ALTERNATO SINUSOIDALE (P.A.S.)**

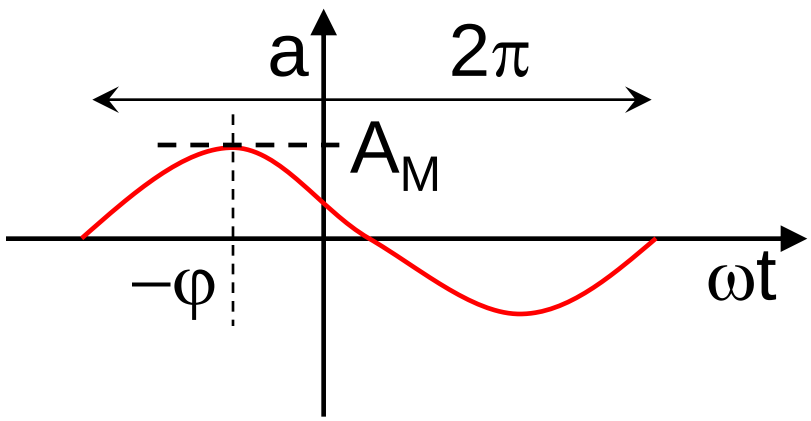
Il regime P.A.S. ha un posto predominante perchè:

- la potenza elettrica e i segnali elettrici si trasmettono generalmente in P.A.S.
- è facile generare, e ancor più facile trasmettere, ed è utile convertire la potenza elettrica in P.A.S.
- un qualunque segnale periodico è riconducibile alla somma di infiniti segnali P.A.S.

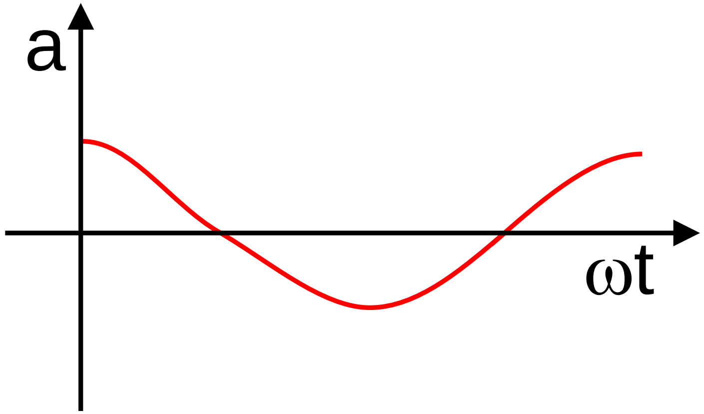
Regime P.A.S.

- **GRANDEZZA P.A.S.**

  a(t) oppure a(θ); $\theta = \omega t$



$$a(\theta) = A_M \cos(\theta + \varphi)$$



Valore medio

$$A_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_M \cos(\theta)\, d\theta = 0$$

Regime P.A.S.

- **GRANDEZZA P.A.S.**

Valore medio aritmetico

$$A_{ma} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M \left|\cos(\theta)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi} 4\int_0^{\pi/2} A_M \cos(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} 4A_M \left[\sin(\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2A_M}{\pi}$$

Valore efficace

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_M^2 \cos^2(\theta)\, d\theta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} A_M^2 \frac{1}{2} 2\pi} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

Regime P.A.S.

- **GRANDEZZA P.A.S.**

Fattore di vertice

$$k_v = \frac{A_M}{A} = \sqrt{2} = 1.41$$

Fattore di forma

$$k_f = \frac{A}{A_{ma}} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2A_M} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11$$

Regime P.A.S.

- **VALORE EFFICACE E POTENZA**

Significato di valore efficace di una grandezza periodica (tensione o corrente), ad esempio ai morsetti di un resistore lineare di resistenza R.

La potenza istantanea $p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = v^2(t)/R$ è anche periodica e il suo valor medio P vale:

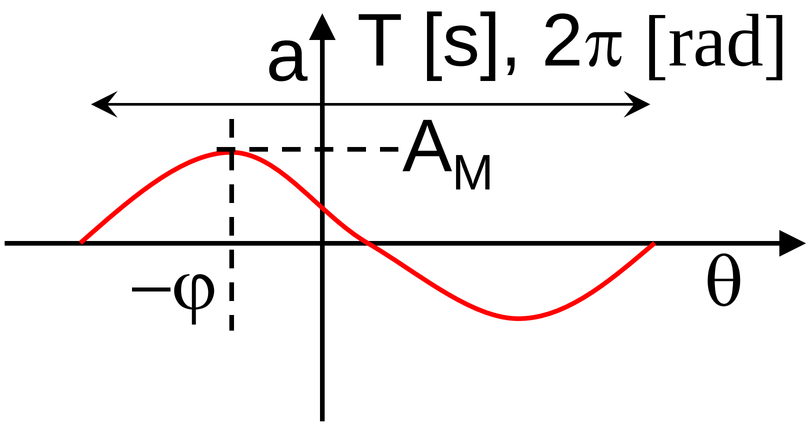
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2(t)dt = R\left(\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}\right)^2 = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Nel dominio di t, θ $\qquad\qquad$ $\theta = \omega t$, $\omega = 2\pi/T$

rappr. grafica



rappr. analitica $\qquad$ $a(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$

ϕ fase iniziale, $\tau = -\phi/\omega$ istante iniziale

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Osservazione: una grandezza P.A.S. è individuata da 3 grandezze reali:

- T oppure f oppure $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

- A_M oppure $A = \dfrac{A_M}{\sqrt{2}}$ oppure $A_{ma} = \dfrac{2A_M}{\pi}$

- φ oppure $\tau = \dfrac{\varphi}{\omega}$

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

La rappresentazione delle grandezze P.A.S. nel dominio del tempo è complicata

Si cerca una rappresentazione equivalente più semplice:

1) TRASFORMAZIONE (Steinmetz, 1908)

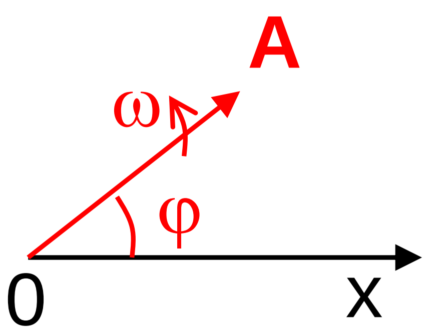
funzione di t		fasore rotante
a(t)	⇒	**A**

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Rappresentazione polare

Coordinate polari (0,x), vettore di ampiezza A, rotante a velocità ω in verso antiorario a partire dalla posizione φ



$\mathbf{A}=(A,\omega,\varphi)=$

$=Ae^{j(\omega t+\varphi)}$

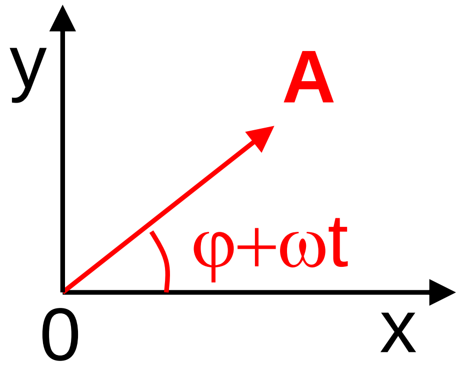
Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Rappresentazione cartesiana

Coordinate cartesiane (x,y), numero complesso di modulo A e argomento $\omega t+\varphi$

$$j=\sqrt{-1}$$



$\mathbf{A}=A\cos(\omega t+\varphi)+$
$+\,j\,A\sin(\omega t+\varphi)$

Regime P.A.S.

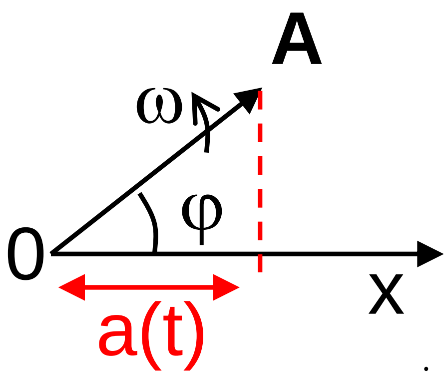
- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

2) ANTITRASFORMAZIONE

fasore rotante **A**	⇒	funzione di t a(t)

Rappresentazione polare

Coordinate polari, proiezione di vettore rotante sull'asse (0,x), a meno del fattore $\sqrt{2}$

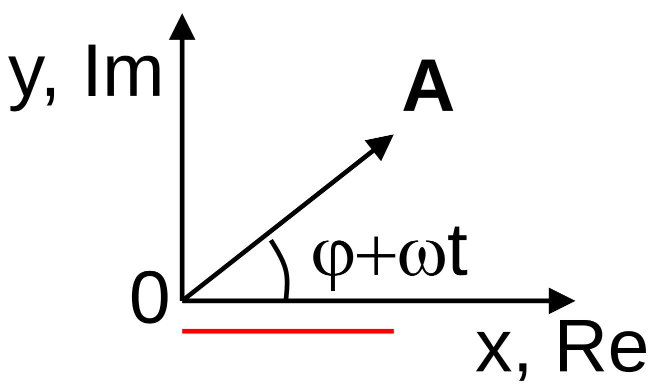


Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Rappresentazione cartesiana

Coordinate cartesiane, parte reale del numero complesso, a meno del fattore $\sqrt{2}$



$$a(t)=\mathrm{Re}(\mathbf{A})=A\cos(\omega t+\varphi)$$

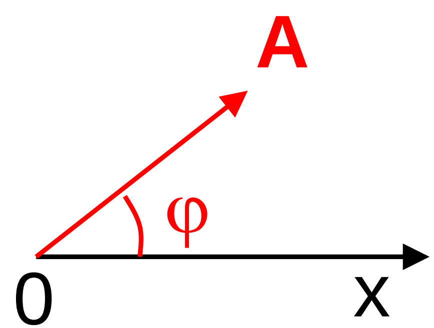
Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Se si prescinde da ω (f, T), perchè nota o uguale per tutte le grandezze

a(t) $\rightleftarrows$ fasore fisso

Rappresentazione grafica

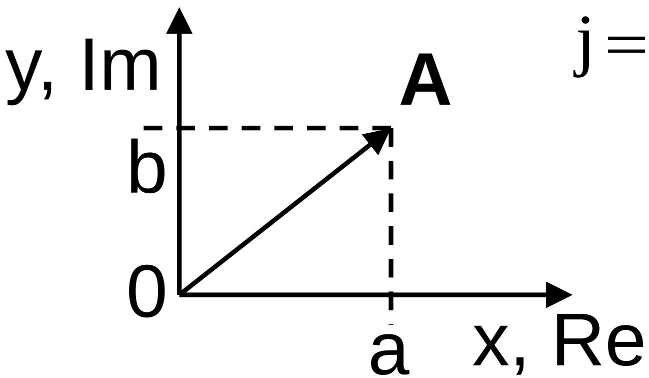


$\mathbf{A} = (A, \varphi)$

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE DELLE GRANDEZZE P.A.S.**

Rappresentazione analitica



$$j = \sqrt{-1}$$

In forma polare

$$\mathbf{A} = Ae^{j\varphi} = A\angle\varphi$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

In forma cartesiana

$$\mathbf{A} = a + jb \quad \text{con} \quad a = A\cos\varphi,\ b = A\sin\varphi$$

Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

Nel dominio di a(t)

$$a(t)+b(t) \; ; \quad ka(t) \; ; \; \frac{d}{dt}[a(t)] \; ; \int_0^t a(t')dt'$$

Nel dominio dei fasori ?

Regime P.A.S.

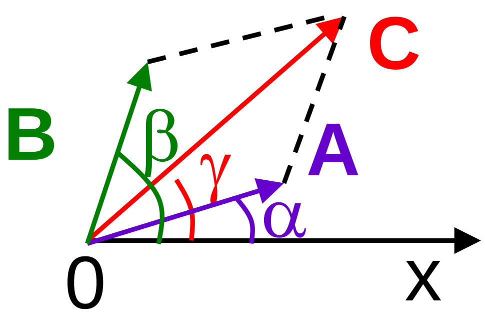
- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

Il fasore della somma di due grandezze P.A.S. di uguale ω è la somma dei fasori delle due grandezze

$$a(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t}) \qquad b(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{B}e^{j\omega t})$$

$$c(t)=a(t)+b(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t})+\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{B}e^{j\omega t})=$$

$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}[(\mathbf{A}+\mathbf{B})e^{j\omega t}]=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{C}e^{j\omega t}) \quad \text{con} \quad \mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$$



$$\mathbf{A}=Ae^{j\alpha}$$

$$\mathbf{B}=Be^{j\beta}$$

Somma di due fasori

Risulta:

$$Ce^{j\gamma} = Ae^{j\alpha} + Be^{j\beta}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\tan\gamma = \frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}$$

Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

Il fasore del prodotto di uno scalare per una grandezza P.A.S. è il prodotto dello scalare per il fasore della grandezza stessa

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \alpha)$$

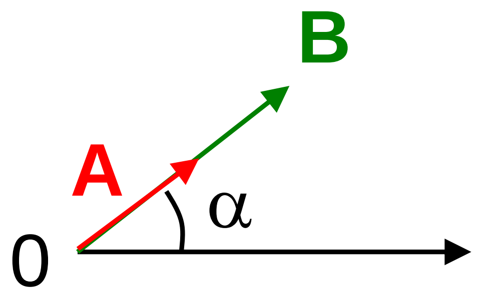
$$b(t) = k a(t) = \sqrt{2} k A \cos(\omega t + \alpha)$$

$\mathbf{A} = a_1 + j a_2$

$a_1 = A \cos\alpha$

$a_2 = A \sin\alpha$

$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = b_1 + j b_2 = k a_1 + j k a_2$



Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

Il fasore della derivata di una grandezza P.A.S. è jω per il fasore della grandezza

$a(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t})$ $\qquad$ $\mathbf{A}=Ae^{j\alpha}$

$$b(t)=\frac{d}{dt}a(t)=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}(\sqrt{2}\mathbf{A}e^{j\omega t})\right]=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}(\sqrt{2}Ae^{j(\omega t+\alpha)})\right]=$$

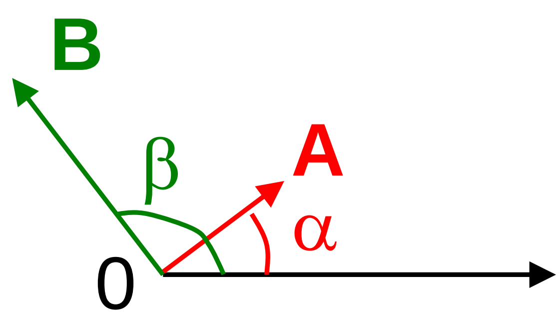
$$=\frac{d}{dt}\left[\sqrt{2}A\cos(\omega t+\alpha)\right]=-\sqrt{2}A\omega\sin(\omega t+\alpha)=$$

Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

$$= \sqrt{2} A \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t + \alpha\right) = \mathrm{Re}\left[\omega \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \alpha)} e^{j\pi/2}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left[j\omega \sqrt{2} A e^{j(\omega t + \alpha)}\right] = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\left[j\omega A e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\left[B e^{j\omega t}\right]$$



$\mathbf{B} = Be^{j\beta}$

$\mathbf{B} = j\omega \mathbf{A} = j\omega(a_1 + ja_2) =$
$= -\omega a_2 + j\omega a_1$

$\beta - \alpha = \pi/2$

Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

Il fasore dell'integrale di una grandezza P.A.S. è 1/jω per il fasore della grandezza

$$a(t)=\sqrt{2}A\cos(\omega t+\alpha)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}e^{j\omega t}) \qquad \mathbf{A}=a_1+ja_2$$

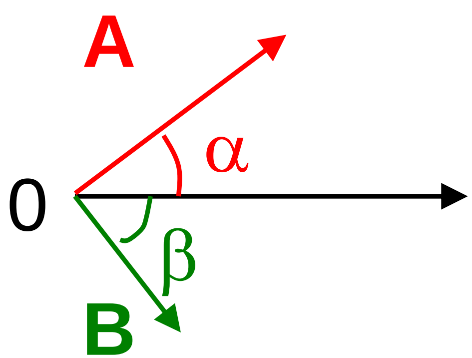
$$b(t)=\int_0^t a(t')dt'=\sqrt{2}\frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}) \qquad \mathbf{B}=b_1+jb_2$$

$$b(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\omega}Ae^{j(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2})}\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\omega}Ae^{j(\omega t+\alpha)}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[Be^{j\omega t}\right]$$

Regime P.A.S.

- **OPERAZIONI SULLE GRANDEZZE P.A.S.**

$$\mathbf{B}=-j\mathbf{A}/\boldsymbol{\omega}=(1/j\omega)(a_1+ja_2)=a_2/\omega-ja_1/\omega$$



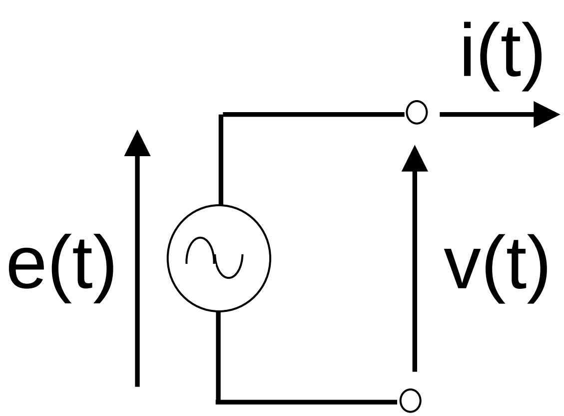
$$\mathbf{B}=\mathbf{A}/(j\omega)=-j\mathbf{A}/\omega$$

$$\alpha-\beta=\pi/2$$

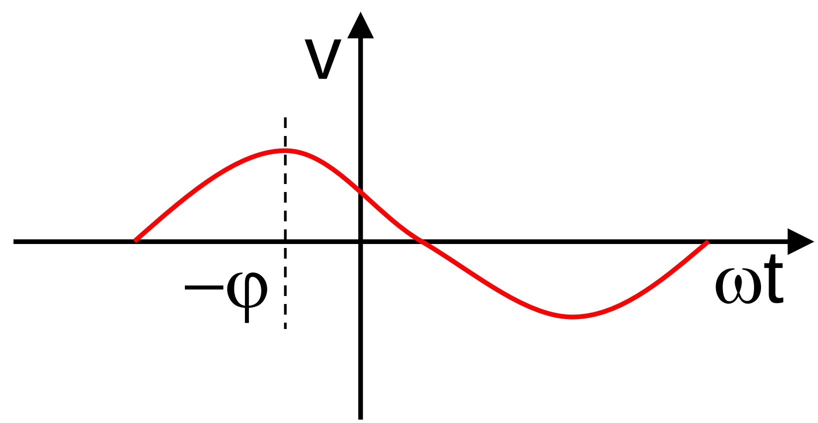
Regime P.A.S.

- **BIPOLI ELEMENTARI IN REGIME P.A.S.**

Generatore ideale di tensione



OL per valori istantanei

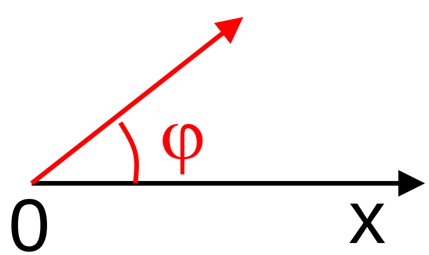


$$v(t) = e(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \varphi)$$

OL per fasori **V=E**

V=**E**=

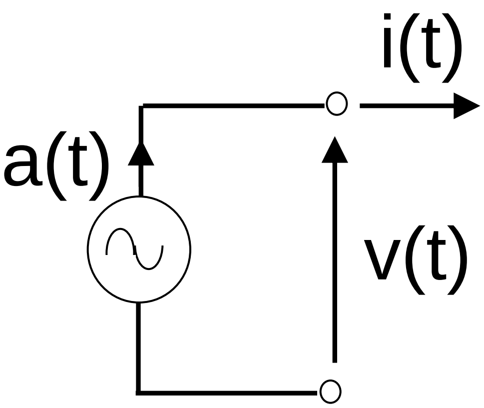
=E∠φ



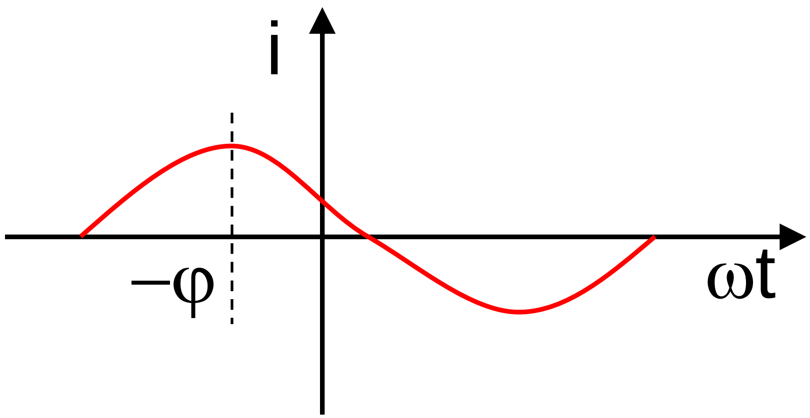
Regime P.A.S.

- **BIPOLI ELEMENTARI IN REGIME P.A.S.**

Generatore ideale di corrente



OL per valori istantanei



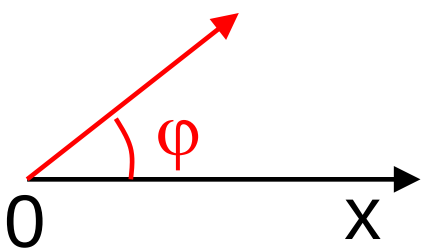
$$i(t) = a(t) = \sqrt{2}A\cos(\omega t + \varphi)$$

OL per fasori

I=A

I=A=

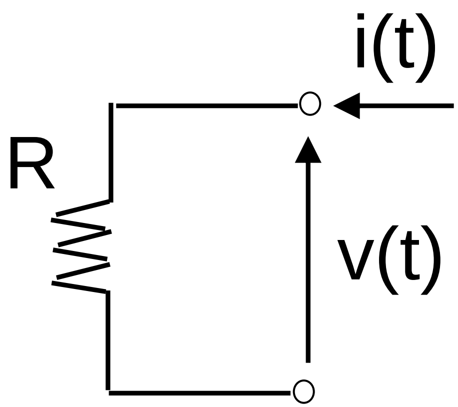
$=A\angle\varphi$



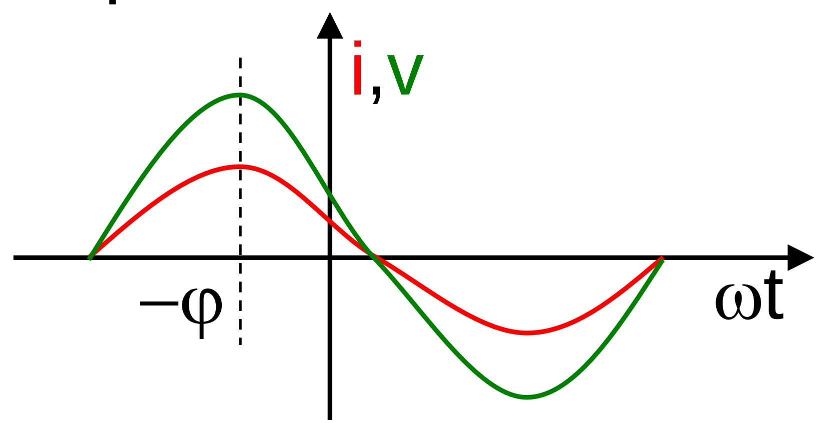
Regime P.A.S.

BIPOLI ELEMENTARI IN REGIME P.A.S.

Resistore ideale normale



OL per valori istantanei

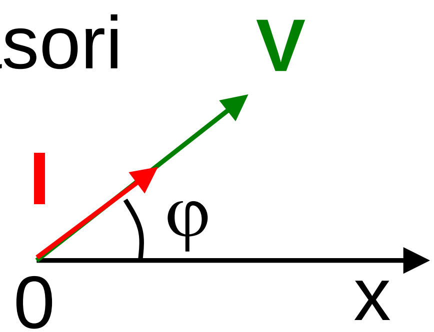


$$v(t) = Ri(t) = R\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi)$$

OL per fasori

V=R**I**=

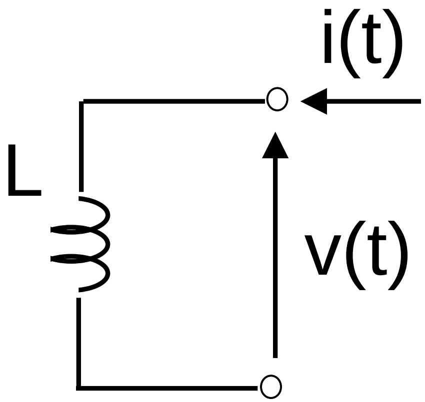
=RI∠φ



Regime P.A.S.

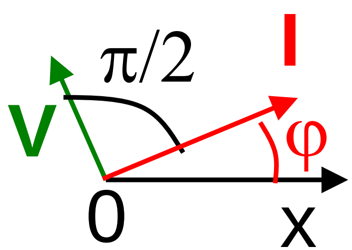
- **BIPOLI ELEMENTARI IN REGIME P.A.S.**

Induttore ideale normale

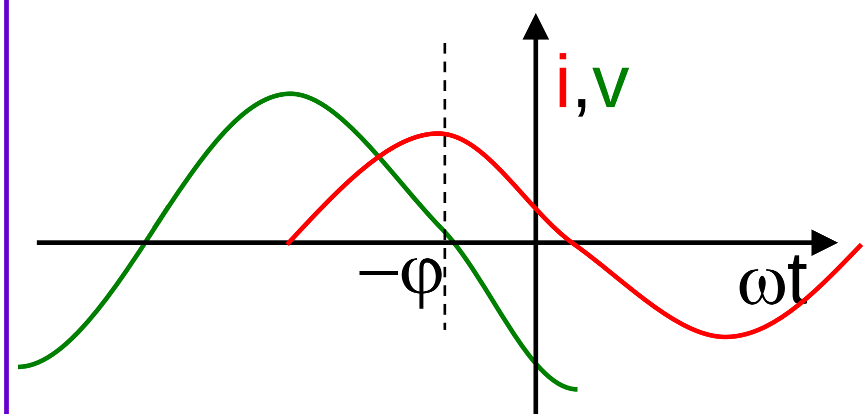


OL per fasori

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} =$$
$$= \omega L I \angle \varphi + \pi/2$$



OL per valori istantanei

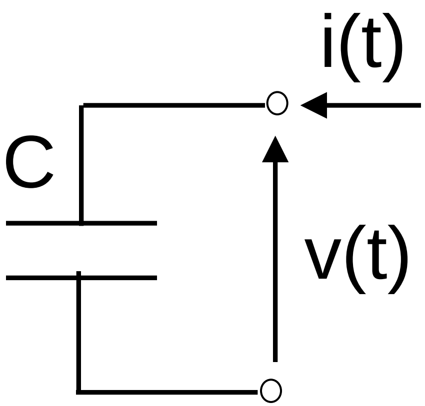


$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) = L\omega\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

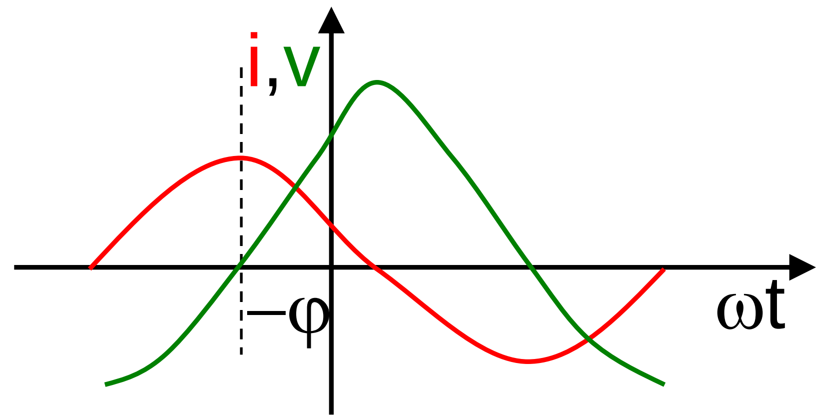
Regime P.A.S.

- **BIPOLI ELEMENTARI IN REGIME P.A.S.**

Condensatore ideale normale

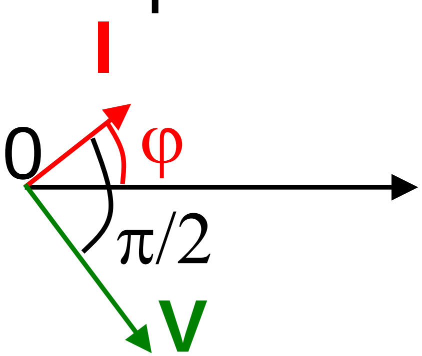


OL per valori istantanei



$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' = \frac{1}{\omega C}\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

OL per fasori



$$\mathbf{V} = -\frac{j}{\omega C}\,\mathbf{I} = \frac{I}{\omega C}\angle\varphi - \frac{\pi}{2}$$

Regime P.A.S.

- **IMPEDENZA DI UN BIPOLO PASSIVO LINEARE**

Per i tre bipoli passivi elementari (R, L , C) e per un qualunque bipolo passivo e lineare è possibile scrivere la legge di Ohm in forma unica e compatta?

La risposta è affermativa nel dominio dei fasori

$$\mathbf{V} = R\,\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = j\omega L\,\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = -j/(\omega C)\,\mathbf{I}$$

Regime P.A.S.

- **IMPEDENZA DI UN BIPOLO PASSIVO LINEARE**

Operatore fasore che moltiplicato per il fasore **I** fornisce il fasore **V**.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$$

$\mathbf{Z} = R + jX$ R resistenza $[\Omega]$ X reattanza $[\Omega]$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{X}{R} \qquad \mathbf{Z} = Z\,e^{j\varphi} = Z\angle\varphi$$

$$Ve^{j\varphi_v} = Ze^{j\varphi}Ie^{j\varphi_i} \qquad \varphi = \varphi_v - \varphi_i$$

Regime P.A.S.

- **AMMETTENZA DI UN BIPOLO PASSIVO LINEARE**

Operatore fasore che moltiplicato per il fasore **V** fornisce il fasore **I**.

$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\,\mathbf{V}$ evidentemente $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$

$\mathbf{Y} = G + jB$ G conduttanza $[\Omega^{-1}]$ o $[S]$ B suscettanza $[\Omega^{-1}]$ o $[S]$

Regime P.A.S.

- **DA IMPEDENZA AD AMMETTENZA**

$$\mathbf{Z} = R + jX = Z \angle\varphi$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX}\,\frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

Regime P.A.S.

- **DA IMPEDENZA AD AMMETTENZA**

cartesiana

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

polare

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{\frac{R^2 + X^2}{(R^2 + X^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{1}{Z}$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{G}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{X}{R}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) = -\varphi$$

Regime P.A.S.

- **TABELLA DELLE IMPEDENZE ELEMENTARI**

	OL	$\mathbf{Z}$	R	X	Z	φ
resistore	$\mathbf{V}=R\mathbf{I}$	R	R	0	R	0
induttore	$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}$	$j\omega L$	0	ωL	ωL	$+\frac{\pi}{2}$
condensatore	$\mathbf{V}=\frac{-j}{\omega C}\mathbf{I}$	$\frac{-j}{\omega C}$	0	$\frac{-1}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

Regime P.A.S.

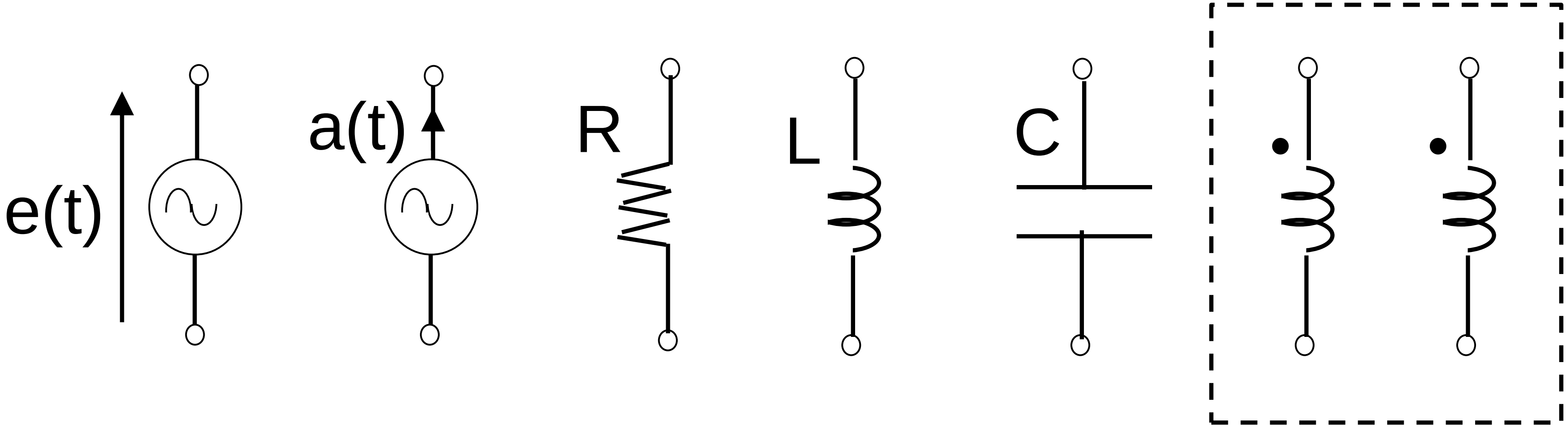
- **TABELLA DELLE AMMETTENZE ELEMENTARI**

	OL	$\mathbf{Y}$	G	B	Y	θ
resistore	$\mathbf{I}=\mathbf{V}/R$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	0	$\frac{1}{R}$	0
induttore	$\mathbf{I}=\frac{-j}{\omega L}\mathbf{V}$	$\frac{-j}{\omega L}$	0	$\frac{-1}{\omega L}$	$\frac{1}{\omega L}$	$-\frac{\pi}{2}$
condensatore	$\mathbf{I}=j\omega C\mathbf{V}$	$j\omega C$	0	ωC	ωC	$+\frac{\pi}{2}$

Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

CIRCUITO ELETTRICO = CONNESSIONE DI BIPOLI ELEMENTARI



Doppio bipolo mutuo induttore

Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

ANALISI DEL CIRCUITO

Noti e(t), a(t), R, L, C

ricavare v(t), i(t) per il generico bipolo

Supponiamo il circuito lineare (R, L, C costanti)

Se e(t), a(t) hanno uguale ω,
allora anche v(t), i(t) hanno uguale ω

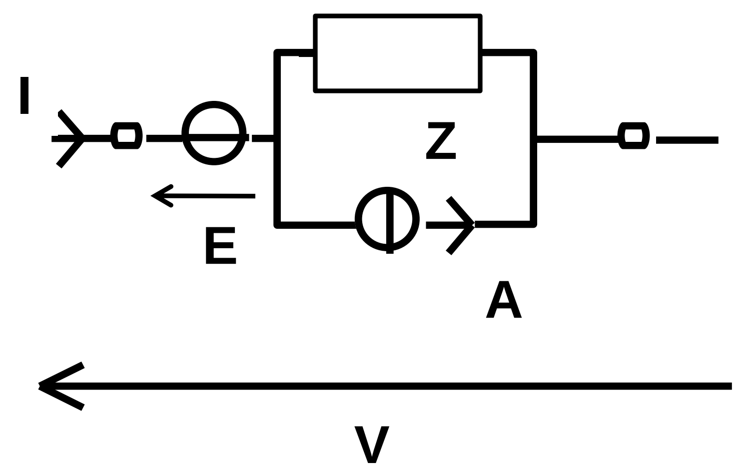
Se e(t), a(t) hanno diversa ω,
si usa la sovrapposizione degli effetti

Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

STRUMENTI RISOLUTIVI

	Dominio del tempo	Dominio dei fasori
OL	v=v(i)	**V**=**E**+**Z**(**I**-**A**)



Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

STRUMENTI RISOLUTIVI

	Dominio del tempo	Dominio dei fasori
KVL	$\sum_{i} v_i(t) = 0$	$\sum_{i} \mathbf{V}_i=0$
KCL	$\sum_{i} i_i(t) = 0$	$\sum_{i} \mathbf{I}_i=0$

Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

PROCEDURA RISOLUTIVA

1. TRASFORMAZIONE

da dominio di t	⇨	a dominio dei fasori
a, e, v, i	⇨	**A**, **E**, **V**, **I**
R, L, C		**Z**

2. RISOLUZIONE

Nel dominio dei fasori, applicando OL, KVL, KCL e metodi di analisi

Regime P.A.S.

- **CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME P.A.S.**

PROCEDURA RISOLUTIVA

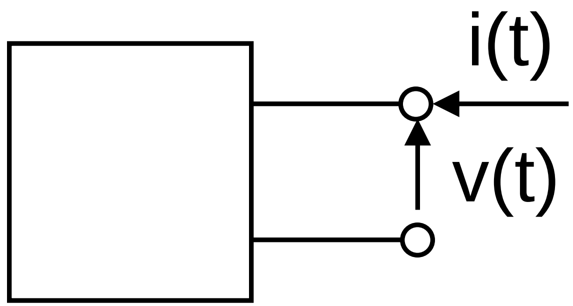
3. ANTITRASFORMAZIONE

da dominio dei fasori $\Rightarrow$ a dominio di t

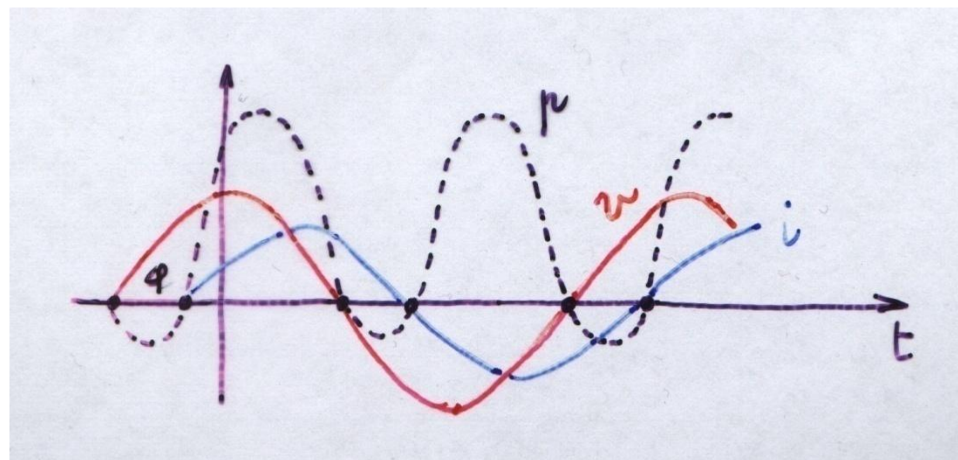
V, **I** $\Rightarrow$ v, i

POTENZA IN REGIME P.A.S.

Si consideri un bipolo, passivo o attivo, lineare



$$p(t) = v(t)\, i(t)$$



$$v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} I [\cos(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\omega t)\sin(\varphi)]$$

Regime P.A.S.

- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**

$$p(t) = v(t)i(t) = 2VI\cos^2(\omega t)\cos(\varphi) + 2VI\sin(\omega t)\sin(\varphi)\cos(\omega t)$$

poichè

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

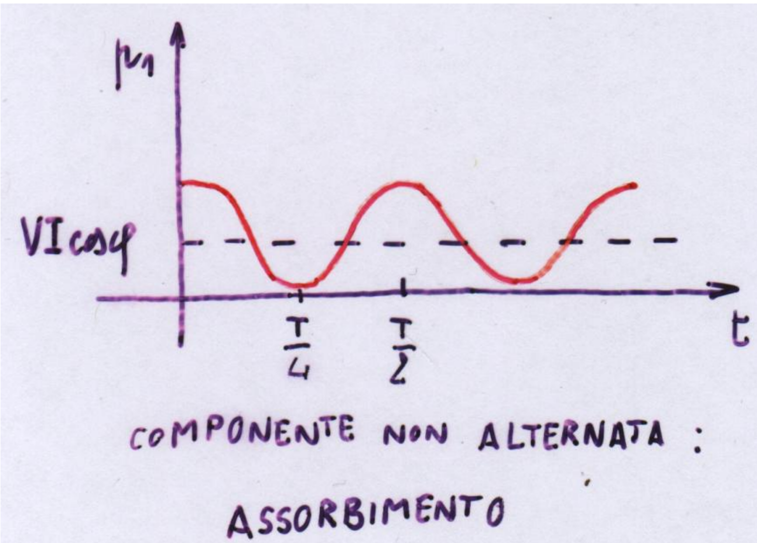
$$p(t) = VI\cos(\varphi)\left[1+\cos(2\omega t)\right] + VI\sin(2\omega t)\sin(\varphi)$$

$$= p_1(t) + p_2(t) = VI\cos(\varphi) + VI\cos(2\omega t - \varphi)$$

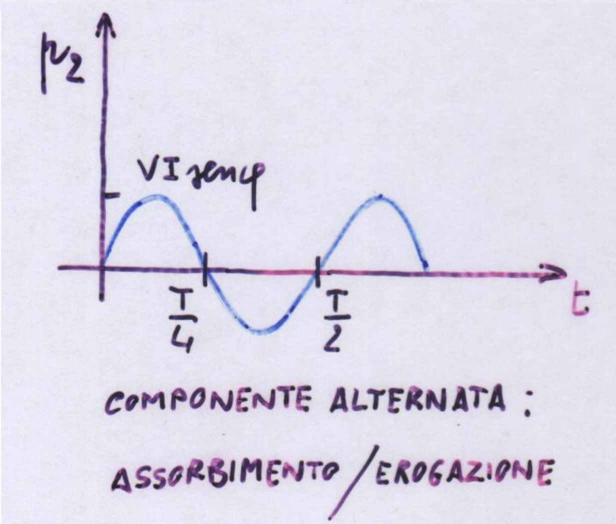
è periodica, sinusoidale, di frequenza 2f, di valor medio VIcos(φ)

Regime P.A.S.

- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**



$$p_1(t) = VI\cos(\varphi)\left[1+\cos(2\omega t)\right]$$



$$p_2(t) = VI\sin(2\omega t)\sin(\varphi)$$

Regime P.A.S.

- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**

Si definiscono POTENZA ATTIVA P

Il valor medio di p(t) o p_1(t) : corrisponde alla potenza elettrica scambiata con l'esterno e convertita in potenza non elettrica

fattore di potenza

P [W] $P = V\, I \cos(\varphi)$

Energia assorbita in un periodo

$$E = \int_0^T p\,dt = T\frac{1}{T}\int_0^T p_1\,dt = TVI\cos(\varphi) = TP$$

Regime P.A.S.

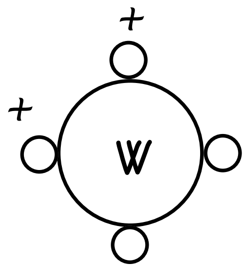
- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**

POTENZA REATTIVA Q

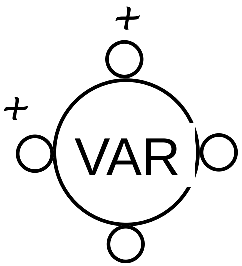
Il valor massimo di $p_2(t)$ corrisponde alla potenza elettrica alternativamente assorbita ed erogata

Q [VAR] $\qquad$ $Q = V I \sin(\varphi)$

MISURA DI P



MISURA DI Q



Regime P.A.S.

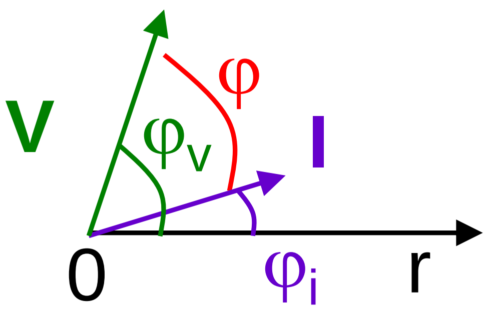
- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**

POTENZA APPARENTE A

La potenza apparente è un fasore

$\mathbf{A} = (A, \varphi) = (VI, \varphi)$

Come ottenere **A** da **V** e **I**?



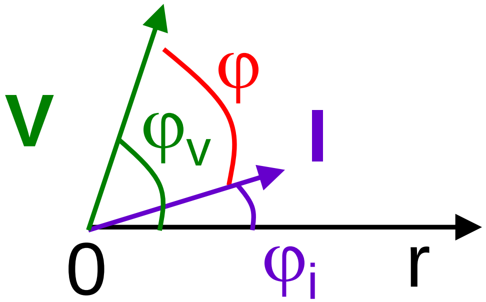
E' forse **A** = **V I**?

$$\mathbf{A} = Ve^{j\varphi_v} Ie^{j\varphi_i} = VIe^{j(\varphi_v + \varphi_i)}$$ **NO!**

Regime P.A.S.

- **POTENZA IN REGIME P.A.S.**

E' forse **A** = **V I***?



$$\mathbf{A} = Ve^{j\varphi_V} Ie^{-j\varphi_i} = VIe^{j(\varphi_V - \varphi_i)}$$ **SÌ !**

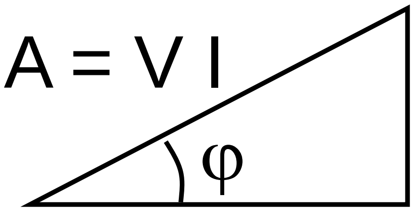
P = Re [**VI***]

Q = Im [**VI***]

- **RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE POTENZE**

TRIANGOLO DELLE POTENZE

$A = V\,I$



$Q = V\,I\,\sin(\varphi)$

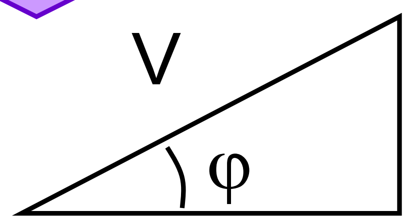
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$$

$P = V\,I\,\cos(\varphi)$

dividendo per I

TRIANGOLO DELLE TENSIONI

V



$V\,\sin(\varphi)$

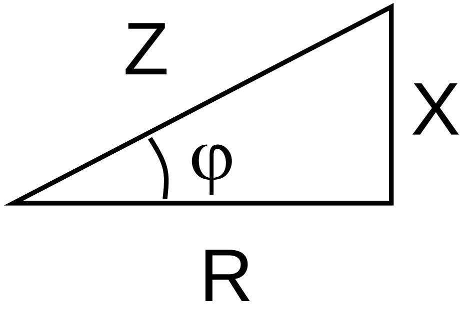
$V\,\cos(\varphi)$

Regime P.A.S.

- **RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE POTENZE**

TRIANGOLO DELLE TENSIONI

TRIANGOLO DELL' IMPEDENZA



Regime P.A.S.

- **SEGNI DELLE POTENZE (CONVENZIONE UTILIZZATORI)**

$|\varphi| = |\varphi_v - \varphi_i| < \frac{\pi}{2}$ P = VIcos(φ)>0 assorbimento

$|\varphi| > \frac{\pi}{2}$ P = VIcos(φ)<0 erogazione

φ>0 I in ritardo su V Q>0 INDUTTIVA

φ<0 I in anticipo su V Q<0 CAPACITIVA

Regime P.A.S.

- **SEGNI DELLE POTENZE**

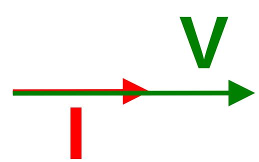
OSSERVAZIONE – Se si assegna $\cos(\varphi)$ in luogo di φ, occorre precisare

$\cos(\varphi)_R$ (I in ritardo) $\varphi>0$

$\cos(\varphi)_A$ (I in anticipo) $\varphi<0$

Regime P.A.S.

- **POTENZE PER I BIPOLI PASSIVI ELEMENTARI**

	FASORI	OL	φ	P	Q
resistore		V = R I	0	VI=RI^2 =V^2/R	0
induttore		V = X I	$+\frac{\pi}{2}$	0	VI=XI^2= V^2/X
condensatore		V = |X|I	$-\frac{\pi}{2}$	0	-VI= -|X|I^2= -V^2/|X|

Regime P.A.S.

- **TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELLA POTENZA ATTIVA E REATTIVA (BOUCHEROT)**

Vale per circuiti lineari in regime P.A.S.

se

$\mathbf{V}_i$ fasori delle tensioni di lato soddisfacenti KVL

$\mathbf{I}_i$ fasori delle correnti di lato soddisfacenti KCL

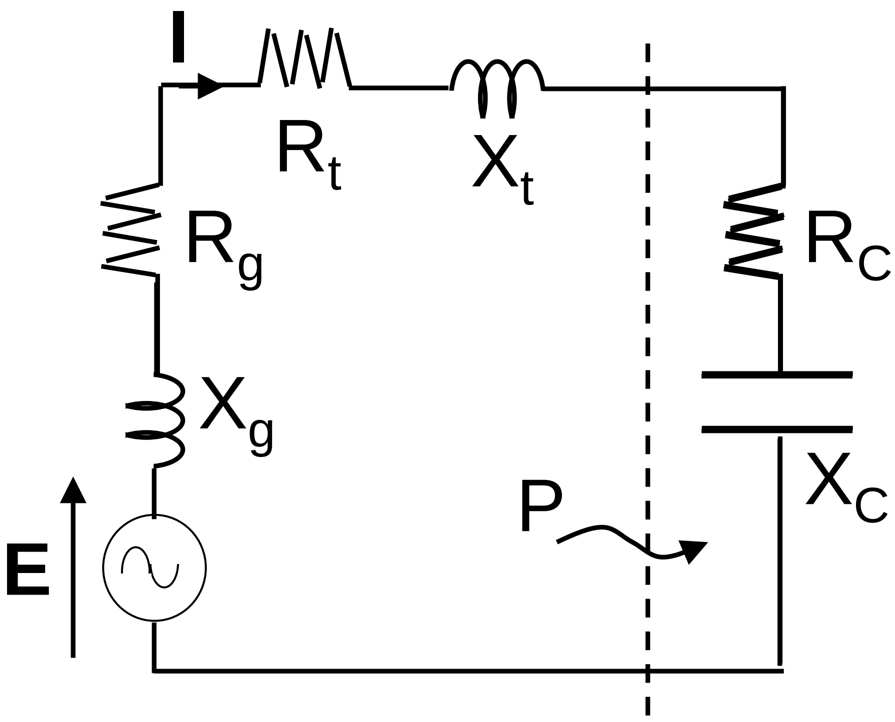
allora $\sum_i \mathbf{V}_i\, \mathbf{I}_i^* = 0, \quad i = 1, \ell$

ovvero $\sum_i \mathrm{Re}[\mathbf{V}_i\, \mathbf{I}_i^*] = \sum_i P_i = 0 \quad i = 1, \ell$

$\sum_i \mathrm{Im}[\mathbf{V}_i\, \mathbf{I}_i^*] = \sum_i Q_i = 0 \quad i = 1, \ell$

Regime P.A.S.

- **MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA DA GENERATORE A CARICO ATTRAVERSO UNA LINEA**



PROBLEMA:

noti **E**, R_g, X_g, R_t, X_t,

Qual è il valore di $\mathbf{Z_C}=R_C+jX_C$ affinchè P sia massima?

Regime P.A.S.

- **MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA DA GENERATORE A CARICO ATTRAVERSO UNA LINEA**

nella maglia **I=E/Z**

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(R_g + R_t + R_c)^2 + (X_g + X_t + X_c)^2}}$$

potenza attiva assorbita dal carico

$$P = R_c I^2 = \frac{R_c E^2}{(R_g + R_t + R_c)^2 + (X_g + X_t + X_c)^2}$$

Regime P.A.S.

- **MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA DA GENERATORE A CARICO ATTRAVERSO UNA LINEA**

affinchè P sia massima

occorre $(X_g + X_t + X_c)^2 = 0$ $\qquad X_c = -(X_g + X_t)$

$$P = \frac{R_c E^2}{(R_g + R_t + R_c)^2}$$

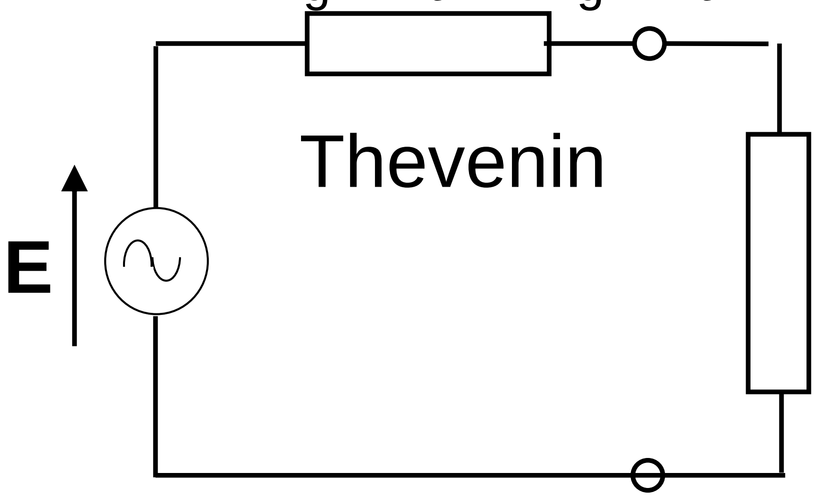
$$\frac{\partial P}{\partial R_c} = \frac{(R_g + R_t + R_c) - 2R_c}{(R_g + R_t + R_c)^3} E^2 = 0$$

Regime P.A.S.

- **MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ATTIVA DA GENERATORE A CARICO ATTRAVERSO UNA LINEA**

$R_c = R_g + R_t$ e, da prima, $X_c = -(X_g + X_t)$

$\mathbf{Z}=R_g+R_t+j(X_g+X_t)$



$\mathbf{Z_c}=\mathbf{Z^*}$

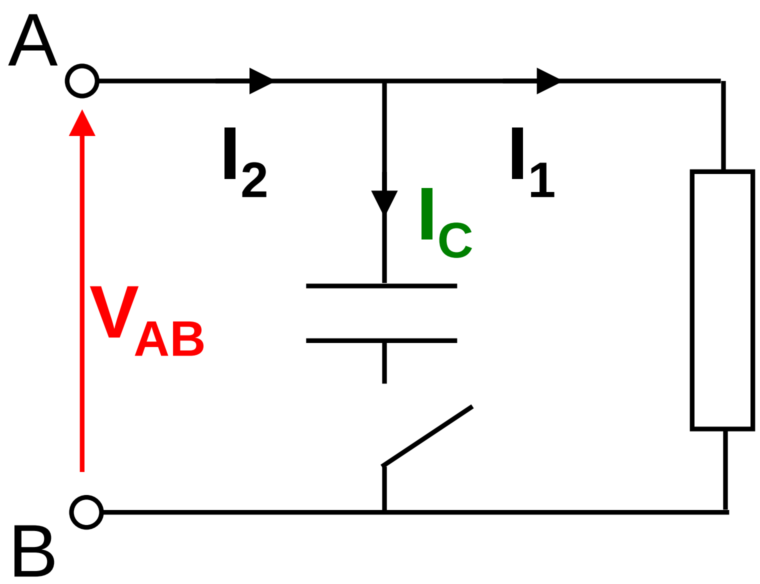
$$P_{max} = \frac{E^2}{4(R_g + R_t)}$$

Generatore e carico si dicono adattati energeticamente

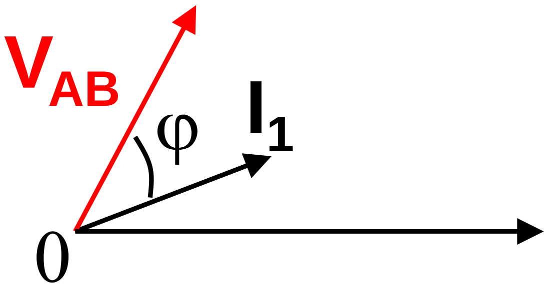
Regime P.A.S.

- **RIFASAMENTO**

  Portare il fattore di potenza di un bipolo prossimo a 1



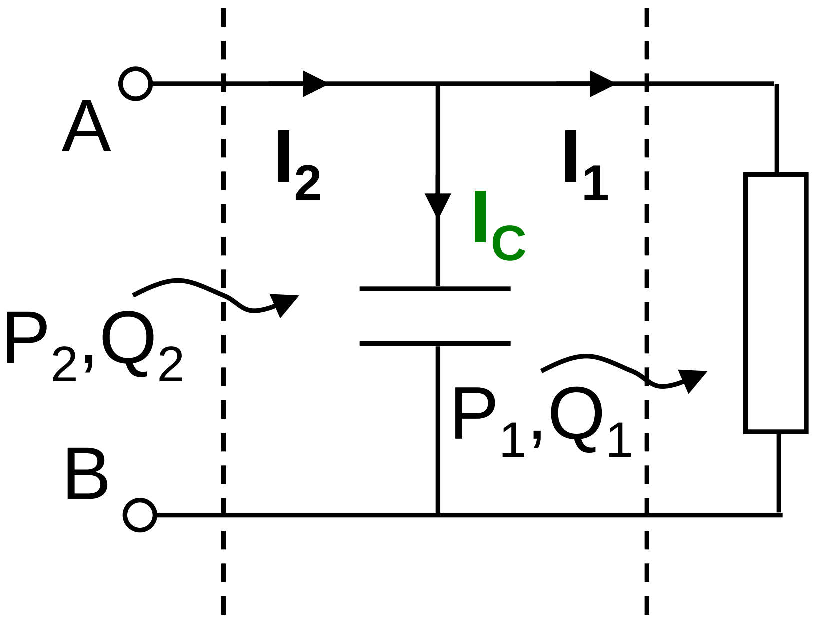
Esempio: rifasare un carico induttivo a $\cos(\varphi)=0.8$ mediante un condensatore



Regime P.A.S.

- **RIFASAMENTO**

Le potenze ai morsetti A-B



In assenza di C

$\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2$, P_1, Q_1

In presenza di C

$\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_C$, $P_2=P_1$,

$Q_2=P_2\tan(\cos^{-1}0.8)$

Regime P.A.S.

- **RIFASAMENTO**

La potenza assorbita da C

$Q_C = Q_2 - Q_1$

$$C = \frac{\left|P_2 \tan(\cos^{-1} 0.8) - Q_1\right|}{\omega V_{AB}^2}$$