Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di

Teoria dei Circuiti

Regime lentamente variabile

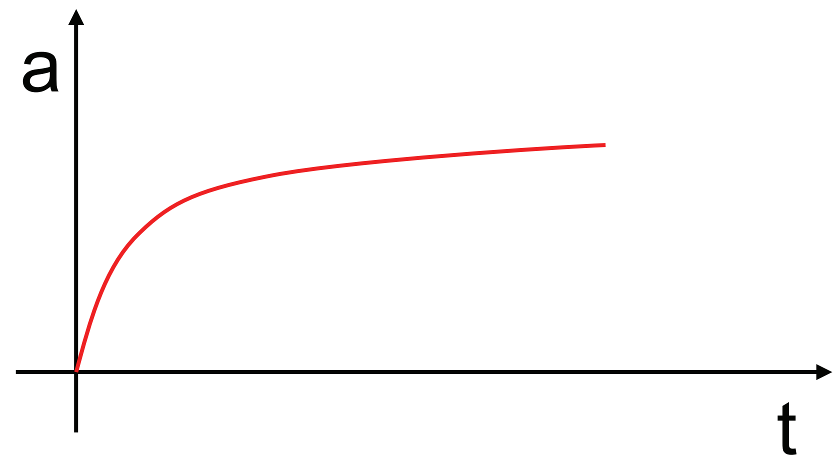
Dipartimento di Ingegneria Elettrica

www.unipv.it/electric/cad

Regime lentamente variabile

v(t), i(t), p(t) funzioni del tempo

Esempio: a(t)



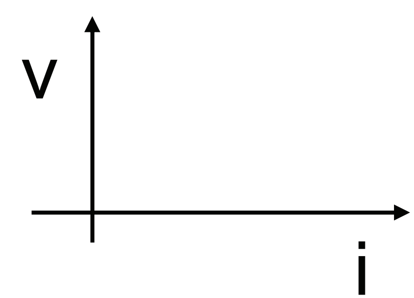
Relazioni: non algebriche, ma integro-differenziali
Misura: anche con oscilloscopio (CRO)
Caso particolare: regime periodico alternato sinusoidale

Regime lentamente variabile

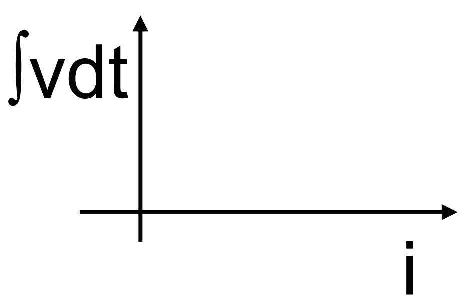
v(t), i(t), p(t) funzioni del tempo

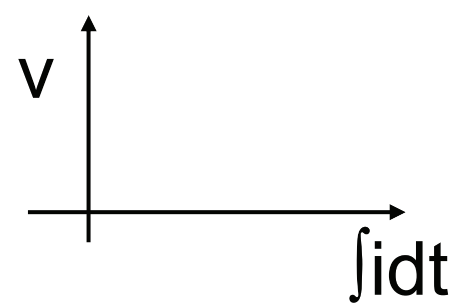
Dal regime stazionario al regime lentamente variabile valgono ancora le definizioni di

- bipolo (ideale, lineare)
- potenza p(t)=v(t)i(t)
- caratteristica, ma oltre a



anche





Regime lentamente variabile

- **NUOVI TIPI DI BIPOLO**

Bipoli conservativi (perfetti = senza perdite)

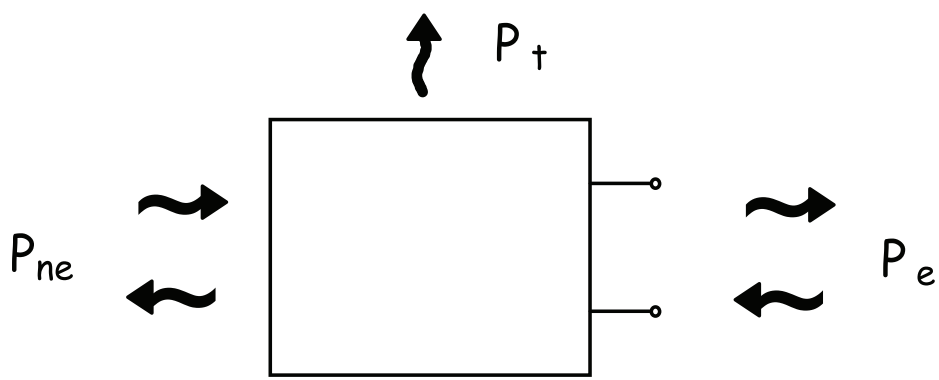
Accumulano energia interna W_i
Inoperosi se W_i non varia con t
Scambiano P_e se W_i varia con t

Sono serbatoi di energia interna (comparivano nel regime stazionario, ma non lavoravano perchè non variava W_i con t).

Regime lentamente variabile

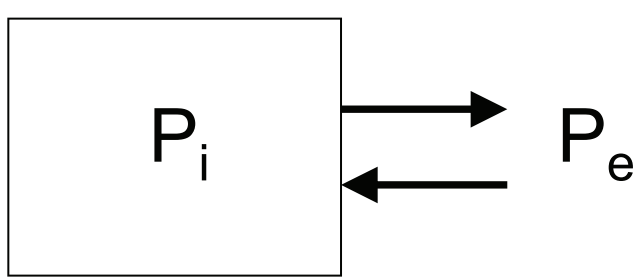
- **TIPI DI BIPOLO**

Oltre a generatori e utilizzatori



$$P_e = P_{ne} + P_t$$

Bipoli conservativi (perfetti)

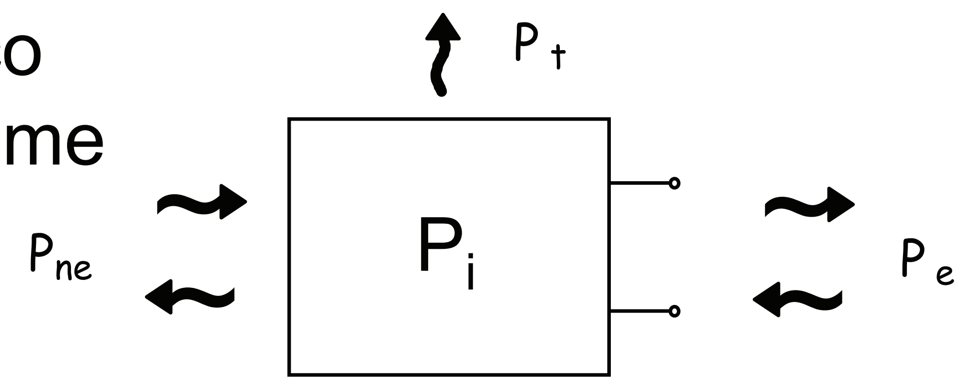


$$P_e = P_i = dW_i / dt$$

Regime lentamente variabile

- **TIPI DI BIPOLO**

Il più generico bipolo in regime variabile:

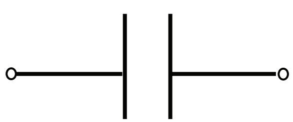
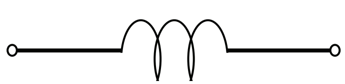


$$P_e + P_{ne} + P_i + P_t = 0$$

BIPOLI ELETTRICI CONSERVATIVI

Fattori della potenza: i,v

Esistono due tipi di bipoli elettrici conservativi che accumulano energia interna W, supposti lineari e perfetti:

BIPOLO	PARAMETRO	EN. INTERNA
condensatore 	capacità C	½ Cv^2
induttore 	induttanza L	½ Li^2

Regime lentamente variabile

- **BIPOLI ELETTRICI CONSERVATIVI**

Equazione di funzionamento (legge di Ohm)

iv = p = dW/dt   in forma differenziale

condensatore

$$i\,v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) = v\,C\frac{dv}{dt}$$

induttore

$$v\,i = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = i\,L\frac{di}{dt}$$

- **BIPOLI ELETTRICI CONSERVATIVI**

Equazione di funzionamento

in forma integrale

condensatore

$$q \equiv \int i dt = Cv$$

q = Cv

carica elettrica
(impulso di corrente)

induttore

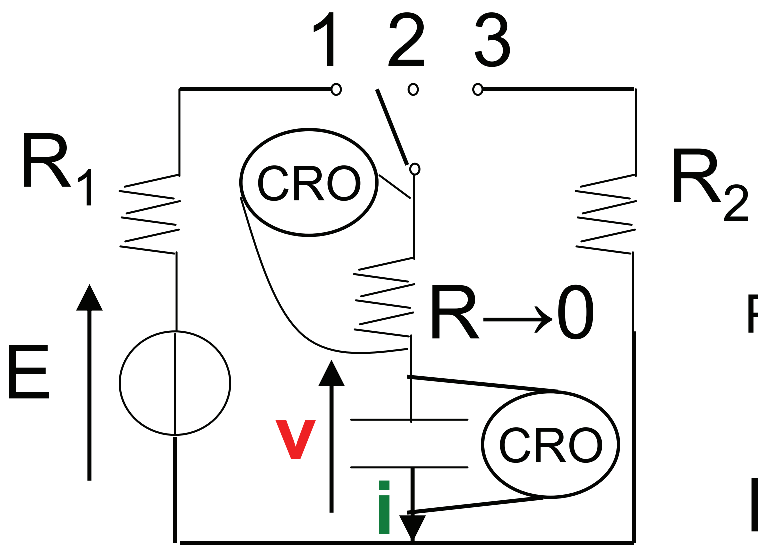
$$u \equiv \int v dt = Li$$

u = Li

flusso magnetico
(impulso di tensione)

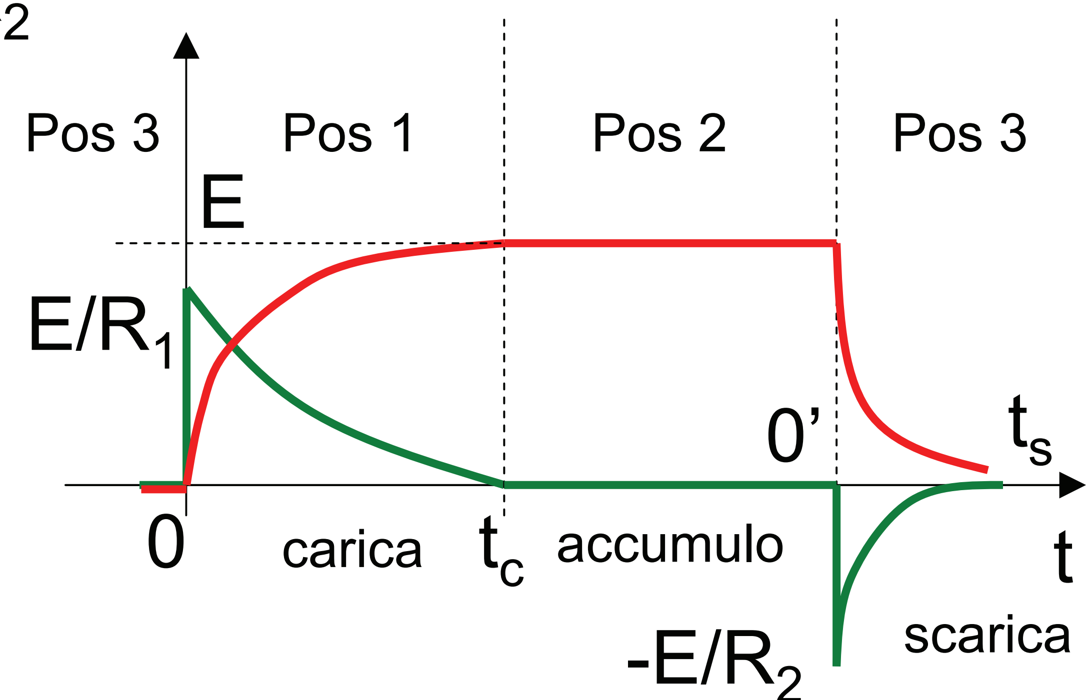
- **FENOMENOLOGIA DEL CONDENSATORE**

Carica, accumulo e scarica



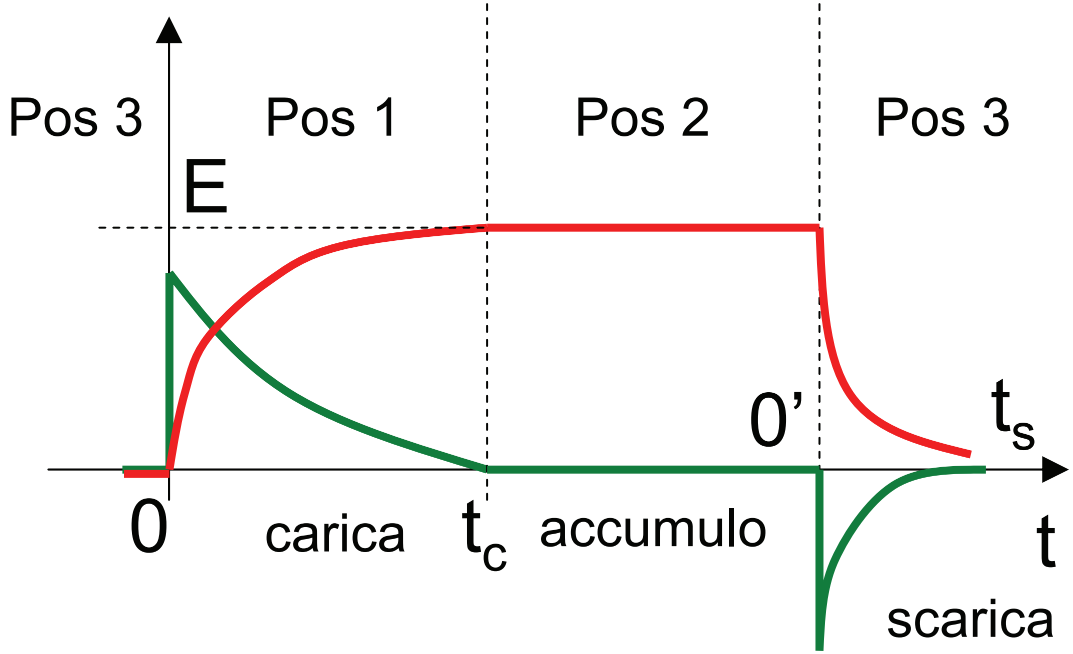
$R_2<R_1$

sperimentalmente



Regime lentamente variabile

- **FENOMENOLOGIA DEL CONDENSATORE**



v continua,
i discontinua,

$$\left.\begin{array}{l} t_c \propto R_1 \\ t_s \propto R_2 \end{array}\right\} \text{non dip. da E}$$

$$Q_c = \int_0^{t_c} idt = Q_s = \int_{0'}^{t_s} idt$$

non dip. da R_1 o R_2, ma da E

$$q = \int_0^t idt'$$ dipende da v(t)

- **EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO CARATTERISTICA**

Esiste un legame tra $Q_{c,s} = \int_{0,0'}^{t_c,t_s} i\,dt$ e la

tensione E finale: f(Q,E)=0 $\Rightarrow$ Q=Q(E)

caratteristica statica in base E

Esiste un legame tra $q(t) = \int_0^t i\,dt'$

e la tensione v: f(q,v)=0 $\Rightarrow$ q=q(v)

caratteristica dinamica in base v

In generale, se il condensatore è perfetto, allora

$\boxed{\text{caratteristica statica} \equiv \text{caratteristica dinamica}}$

Regime lentamente variabile

- **CONDENSATORI NORMALI PERFETTI**

Equazione di funzionamento

Farad

in forma integrale

$q = Cv$ $\quad C = \dfrac{q}{v}$ capacità $\quad [C] = \dfrac{[As]}{[V]} = [F]$

$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt'$$

v(t) dipende da i(t) e anche dalla sua storia: il condensatore ha memoria!

in forma differenziale

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Regime lentamente variabile

- **CONDENSATORI NORMALI PERFETTI (ENERGIA)**

Accumulata nella carica: energia assorbita

$$W_c = \int_0^t p\,dt' = \int_0^t iv\,dt' = \int_0^t C\frac{dv}{dt'}v\,dt' = \int_0^v Cv'dv' = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Restituita nella scarica: energia erogata

$$W_s = \int_0^t p\,dt' = -\int_0^t iv\,dt' = -\int_0^t C\frac{dv}{dt'}v\,dt' = -\int_v^0 Cv'dv' = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$W=W_c=W_s$ indipendentemente dalla forma di v(t)

Regime lentamente variabile

- **CONDENSATORI NORMALI PERFETTI (ENERGIA)**

Osservazioni: $W=W(v)=W(q)$

inoltre $W(t)$ è continua

allora
anche v e q sono continue con t
(in generale è falso per i)
allora
v (oppure q) è variabile di stato

Regime lentamente variabile

- **CONDENSATORI ANOMALI**

  Equazione di funzionamento

$$q = q(v(t)) \qquad i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv}\frac{dv}{dt}$$

- **CONDENSATORI NORMALI TEMPO VARIANTI**

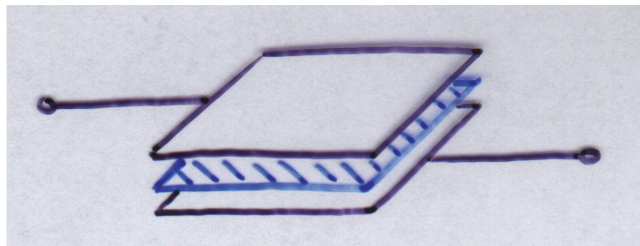
  Equazione di funzionamento

$$q = C(t)v(t) \qquad i = \frac{d}{dt}\left[C(t)v(t)\right] = C\frac{dv}{dt} + v\frac{dC}{dt}$$

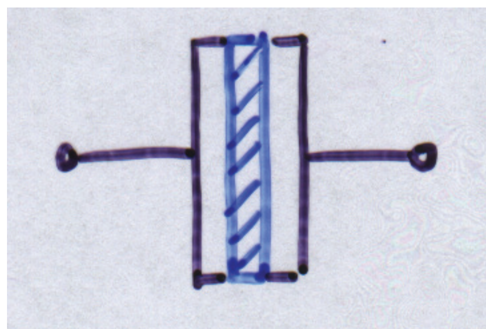
Regime lentamente variabile

- **TIPI DI CONDENSATORI (GEOMETRIE)**

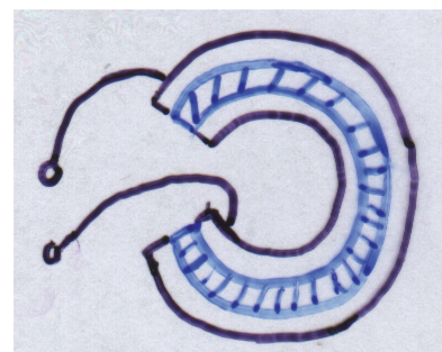
A FOGLI



A DISCO



A ROTOLO



Regime lentamente variabile

- **TIPI DI CONDENSATORI (DIELETTRICI)**

MICA	C bassa V alta Stabili con la temperatura Precisi	A fogli
CERAMICA	Robusti Precisi Poco costosi	A disco
PLASTICA	C alta V alta	A rotolo

Regime lentamente variabile

- **TIPI DI CONDENSATORE (DIELETTRICI)**

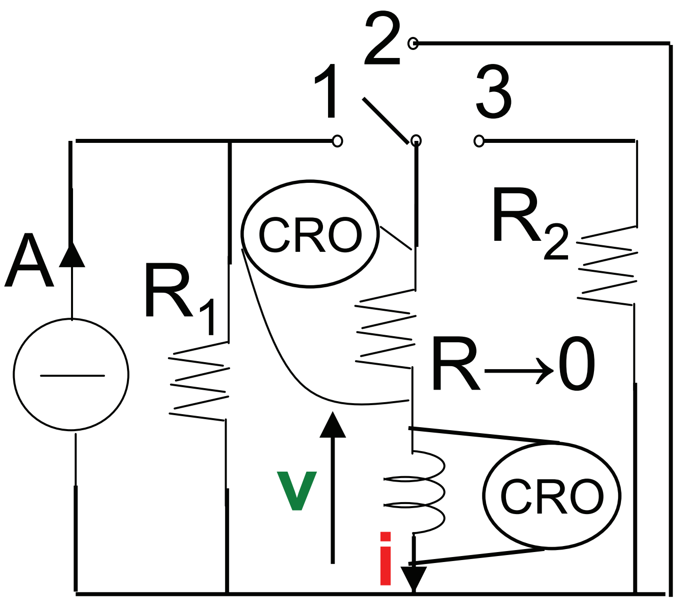
OSSIDO DI Al,
TANTALIO

a rotolo

Elettrolitici
Elettrodi: Al (tantalio) e soluzione elettrolitica
Al: instabili con la temperatura
Tantalio: stabili con la temperatura
C alta
in corrente continua

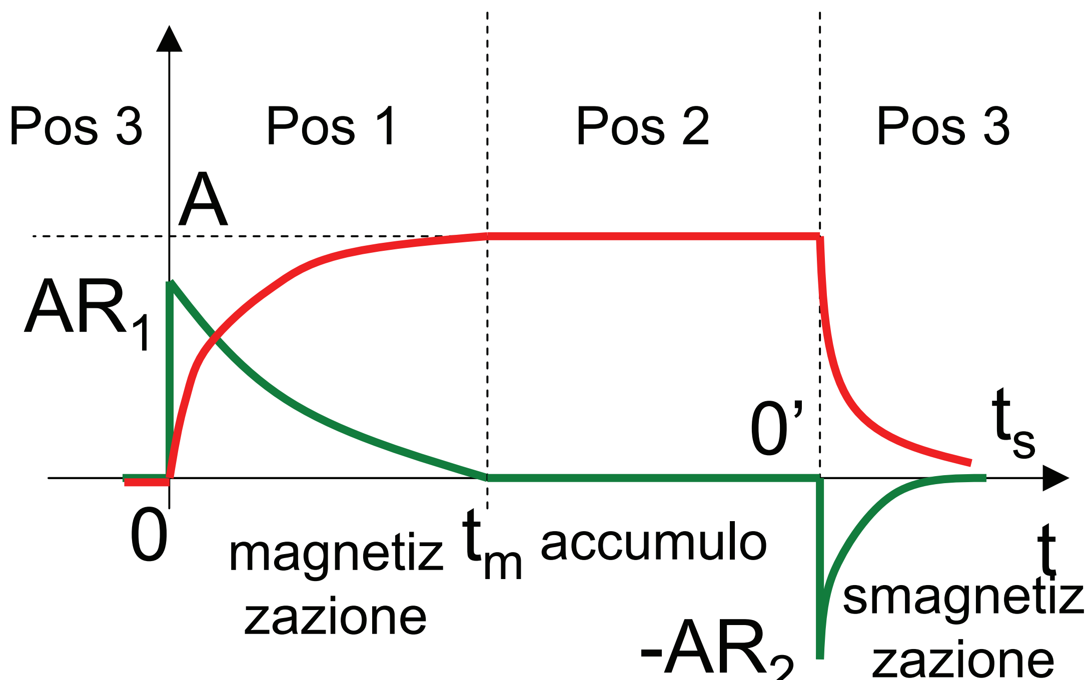
- **INDUTTORI LINEARI PERFETTI**

Magnetizzazione, accumulo e smagnetizzazione



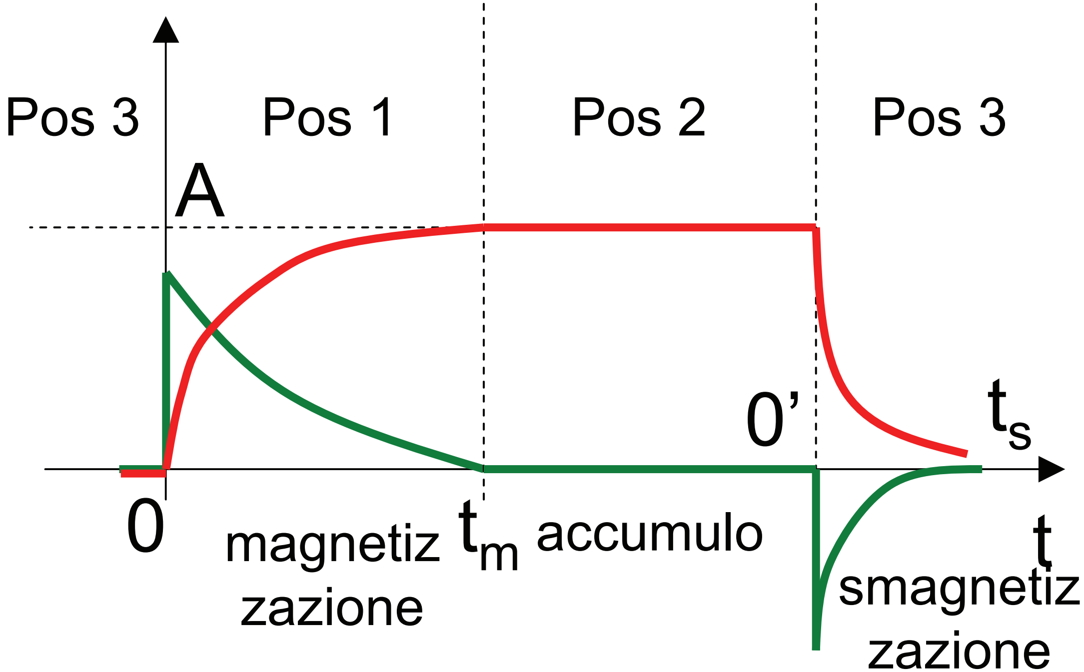
$R_2 > R_1$

sperimentalmente



Regime lentamente variabile

- **FENOMENOLOGIA DELL'INDUTTORE**



i continua,
v discontinua,

$$\left.\begin{array}{l} t_m \propto \dfrac{1}{R_1} \\ t_s \propto \dfrac{1}{R_2} \end{array}\right\} \text{non dip. da A}$$

$$U_m = \int_0^{t_m} v\,dt = U_s = \int_{0'}^{t_s} v\,dt$$ non dip. da R_1 o R_2, ma da A

$$u(t) = \int_0^t v\,dt'$$ dipende da i(t)

Regime lentamente variabile

- **EQUAZIONE DI FUNZIONAMENTO CARATTERISTICA**

Esiste un legame tra $U_m = \int_{0,0'}^{t_m,t_s} v\,dt$ e la

corrente I finale: f(U,I)=0 $\Rightarrow$ U=U(I)

caratteristica statica in base I

Esiste un legame tra $\mathrm{u(t)} = \int_0^t \mathrm{vdt'}$

e la corrente i: f(u,i)=0 $\Rightarrow$ u=u(i)

caratteristica dinamica in base i

In generale, se l'induttore è perfetto, allora

$\boxed{\text{caratteristica statica} \equiv \text{caratteristica dinamica}}$

Regime lentamente variabile

- **INDUTTORI NORMALI PERFETTI**

Equazione di funzionamento

Henry

in forma integrale

$u = Li$ $\qquad L = \dfrac{u}{i}$ induttanza $\qquad [L] = \dfrac{[Vs]}{[A]} = [H]$

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t v\, dt'$$

i(t) dipende da v(t) e
anche dalla sua storia:
l'induttore ha memoria!

in forma differenziale

$$v = L\frac{di}{dt}$$

- **INDUTTORI NORMALI PERFETTI (ENERGIA)**

Accumulata nella magnetizzazione: energia assorbita

$$W_m = \int_0^t p\,dt' = \int_0^t iv\,dt' = \int_0^t L\frac{di}{dt'}i\,dt' = \int_0^i Li'di' = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{u^2}{L}$$

Restituita nella smagnetizzazione: energia erogata

$$W_s = \int_0^t p\,dt' = -\int_0^t vi\,dt' = -\int_0^t L\frac{di}{dt'}i\,dt' = -\int_i^0 Li'di' = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{u^2}{L}$$

$W=W_m=W_s$ indipendentemente dalla forma di i(t)

Regime lentamente variabile

- **INDUTTORI NORMALI PERFETTI (ENERGIA)**

Osservazioni: $W=W(i)=W(u)$

inoltre $W(t)$ è continua

allora
anche i e u sono continue con t
(in generale è falso per v)
allora
i (oppure u) è variabile di stato

Regime lentamente variabile

- **INDUTTORI ANOMALI**

  Equazione di funzionamento in base corrente

$$u = u(i(t)) \qquad v = \frac{du}{dt} = \frac{du}{di}\frac{di}{dt}$$

- **INDUTTORI NORMALI TEMPO VARIANTI**

  Equazione di funzionamento

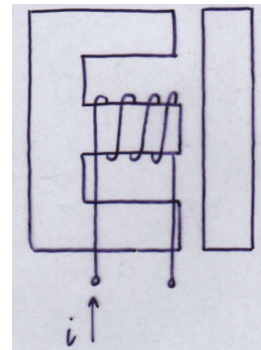
$$u = L(t)i(t) \qquad v = \frac{d}{dt}\left[L(t)i(t)\right] = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}$$

Regime lentamente variabile

- **TIPI DI INDUTTORE**

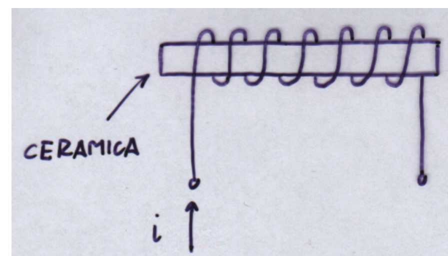
IN FERRO

L alta variabile con I
Fe laminato
Circuiti di potenza



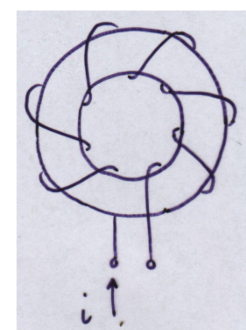
IN ARIA

L bassa costante
Circuiti radio



IN FERRITE

L relativamente alta variabile con I
Costo elevato
Circuiti radio



Regime lentamente variabile

- **FORME D'ONDA DEI SEGNALI ELETTRICI**

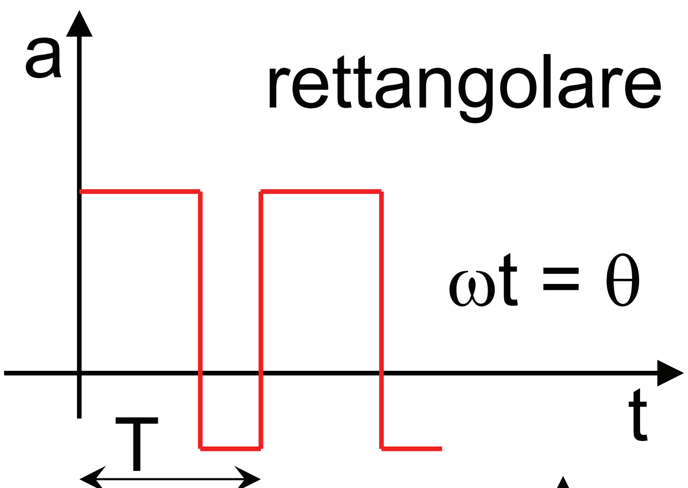
SEGNALE ELETTRICO a(t) :
(v, i) ai morsetti di un bipolo in un lato di circuito

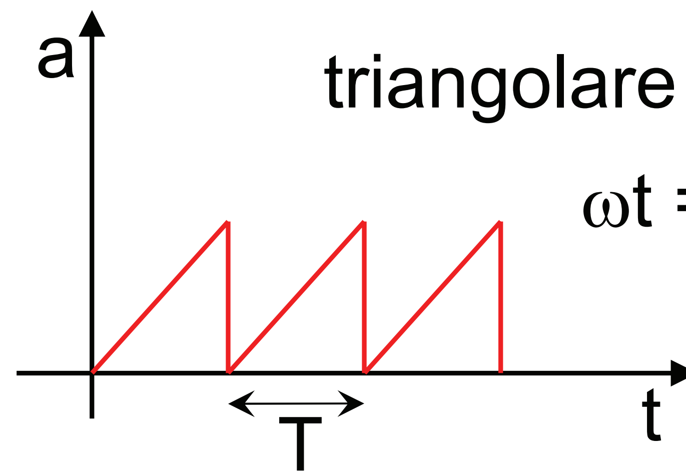
- a(t) è periodico se $a(t+T) = a(t)$ per ogni t

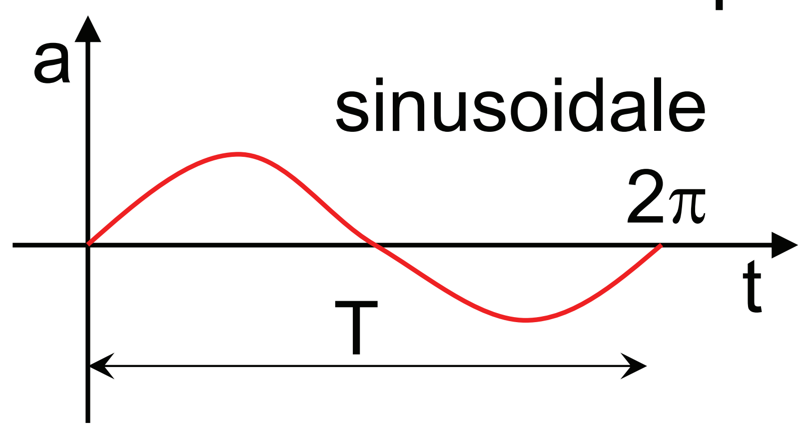
T = periodo [s]
$f = 1/T$ = frequenza [s^{-1} = Hz]
$\omega = 2\pi/T$ = pulsazione [rad s^{-1}]

- **FORME D'ONDA DEI SEGNALI ELETTRICI**

ESEMPI





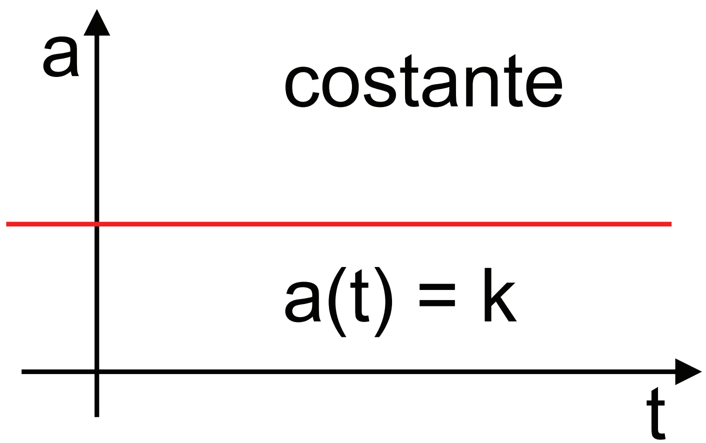


Regime lentamente variabile

- **FORME D'ONDA DEI SEGNALI ELETTRICI**

  - $a(t)$ è aperiodico, viceversa

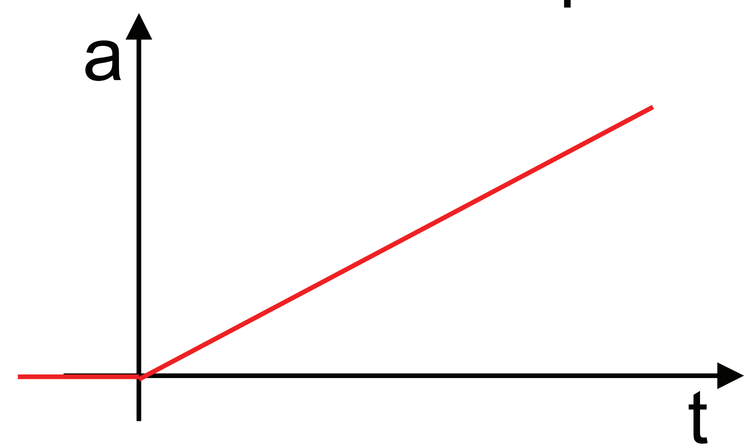
ESEMPI



costante

$a(t) = k$

rampa

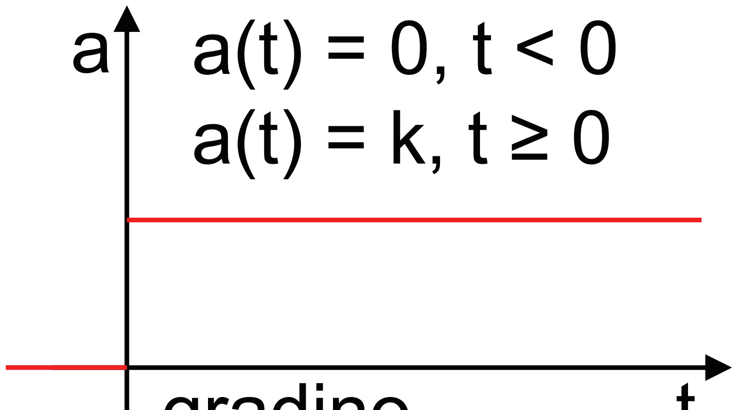


$a(t) = 0,\ t < 0$

$a(t) = kt,\ t \geq 0$

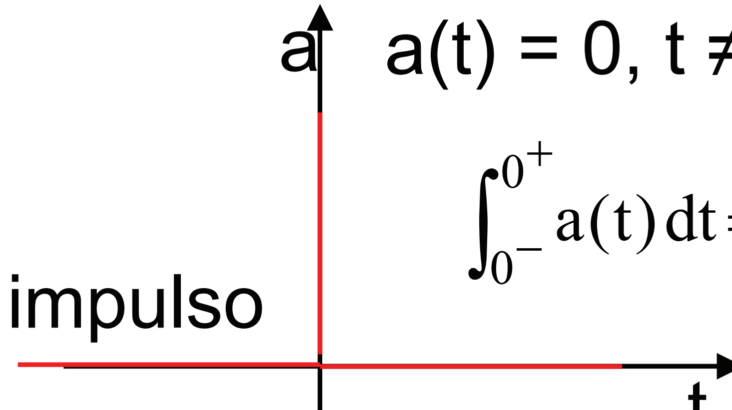
Regime lentamente variabile

- **FORME D'ONDA DEI SEGNALI ELETTRICI**



$a(t) = 0,\ t < 0$
$a(t) = k,\ t \geq 0$

gradino
(unitario se $k = 1$)

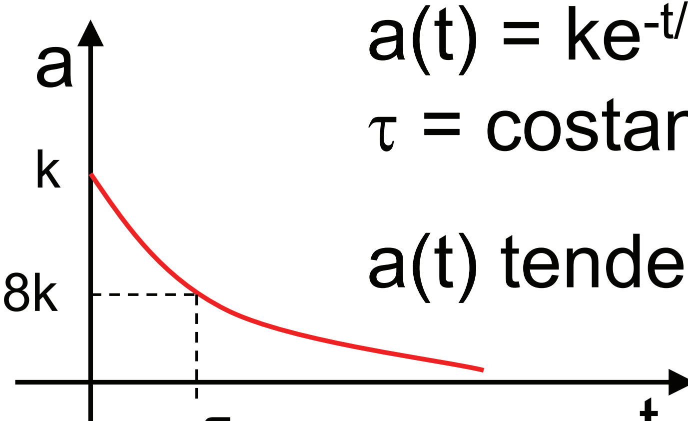


$a(t) = 0,\ t \neq 0$

$$\int_{0^-}^{0^+} a(t)\,dt = k$$

impulso

esponenziale



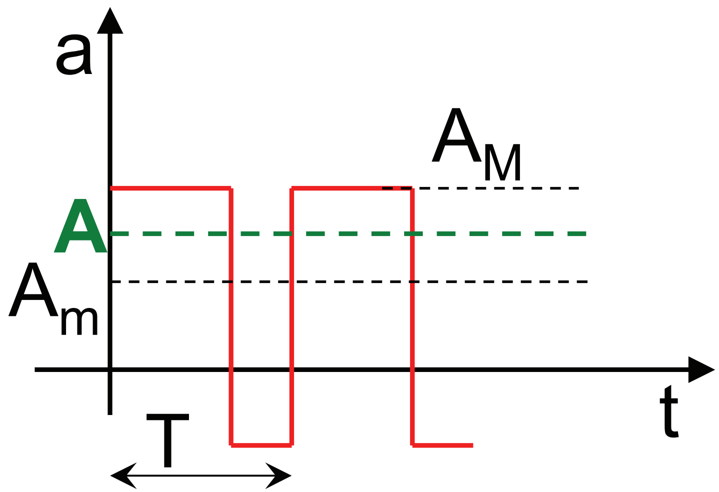
$a(t) = ke^{-t/\tau}$

τ = costante di tempo

$a(t)$ tende a zero dopo 5 τ

Regime lentamente variabile

- **SEGNALE PERIODICO**



Valore massimo A_M

Valore medio $A_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} a(t')\,dt'$

se $A_m \rightarrow 0$, segnale alternato

Valore medio aritmetico $A_{ma} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} |a(t')|\,dt'$

Valore efficace $A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} a^2(t')\,dt'}$

Fattore di vertice

$k_v = A_M/A$

Fattore di forma

$k_f = A/A_{ma}$

Regime lentamente variabile

- **SEGNALE PERIODICO**

Se a(t) ha un numero finito di discontinuità in T e

se esiste ed è finito $\int_{t}^{t+T} |a(t')| dt'$

allora $$a(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

o $$a(t) = A_m + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \varphi)$$

dove $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a(t)\cos(n\omega t) d\omega t \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a(t)\sin(n\omega t) d\omega t$$

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \varphi_n = a\tan\frac{b_n}{a_n}$$

Regime lentamente variabile

- **SEGNALE PERIODICO**

Il segnale è definito

Trasformata di Fourier

dominio di t
a(t)
funzione continua

dominio di ω
A(ω)
funzione discontinua
(spettro)

Antitrasformata di Fourier