Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di Teoria dei Circuiti

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

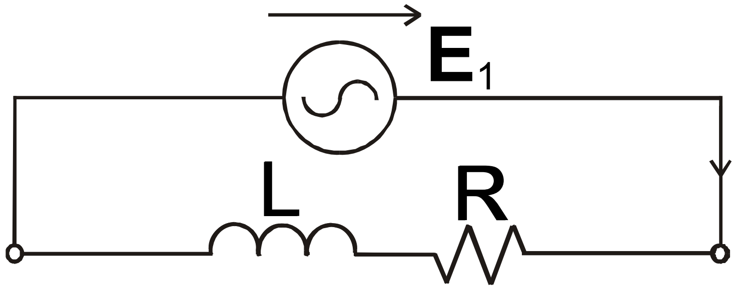
www.unipv.it/electric/cad

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

$$\begin{cases} Z(\omega) \\ \varphi(\omega) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Z} = Z\angle\varphi$$

$$\begin{cases} Y(\omega) \\ \vartheta(\omega) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Y} = Y\angle\vartheta$$

- **Esempio**



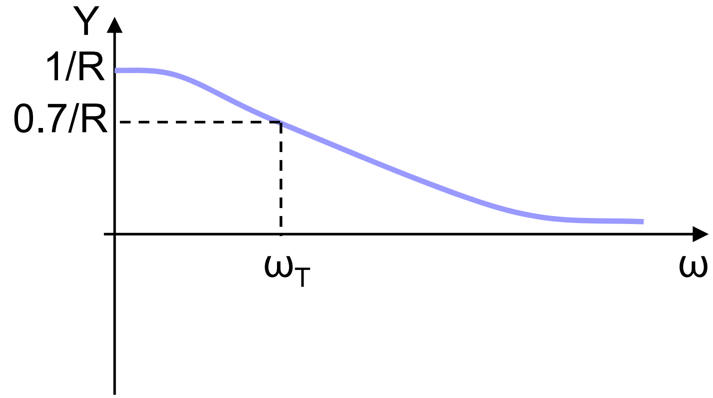
$$\mathbf{I}(\omega)=\mathbf{Y}(\omega)\mathbf{E}_1(\omega)$$

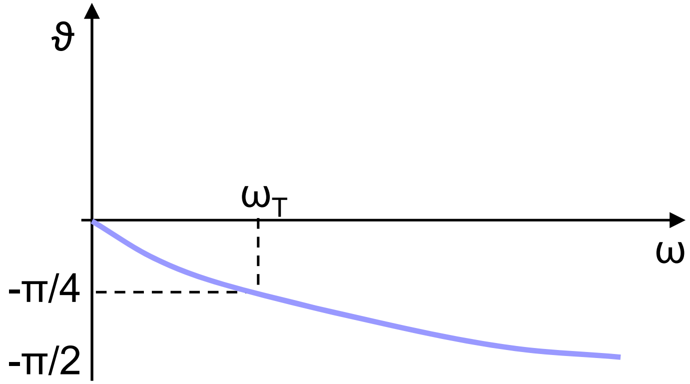
$$\mathbf{Z} = R + j\omega L = \sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\,\angle \tan^{-1}(\omega L/R) = Z\angle\varphi$$

$$\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\,\angle -\tan^{-1}(\omega L/R) = Y\angle\vartheta$$

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Esempio**





SI DEFINISCE FREQUENZA DI TAGLIO O NATURALE

$$\boxed{\omega_t = R/L}$$

IN CORRISPONDENZA DI ESSA

$$Y = \frac{1}{R\sqrt{2}} = \frac{Y_{MAX}}{\sqrt{2}} \qquad \vartheta = -\pi/4$$

- **Esempio**

LA POTENZA ATTIVA ASSORBITA IN QUESTO CASO SARA'

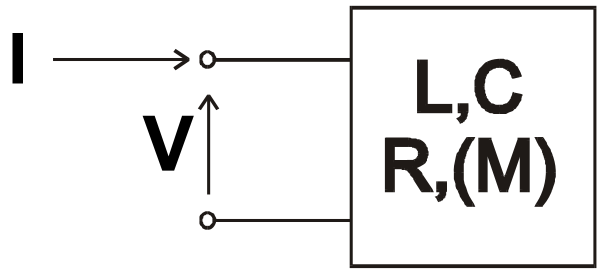
$$RI^2 = RE_1^2Y^2 = \frac{RE_1^2}{2R^2} =$$

$$= \frac{E_1^2}{2R} = \frac{1}{2}\ P_{max}$$

$$\downarrow$$

$$(\omega = 0)$$

- **Bipoli risonanti**



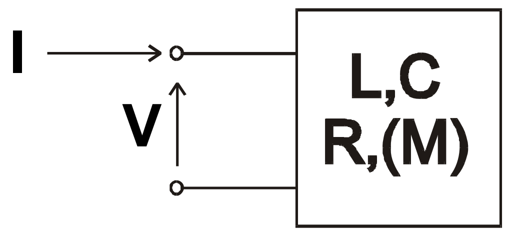
$$\mathbf{Z} = Z\angle\varphi$$

$$\mathbf{Y} = Y\angle\vartheta$$

Sia dato un bipolo passivo lineare in regime P.A.S.
a pulsazione ω contenente **almeno**
un **CONDENSATORE** e un **INDUTTORE**

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti**



$$\mathbf{Z} = Z\angle\varphi$$

$$\mathbf{Y} = Y\angle\vartheta$$

Al variare di ω (o dei parametri) si hanno condizioni di risonanza quando:

$\varphi=0$, $\vartheta=0$, V e I sono in fase

IL BIPOLO ASSORBE SOLO POTENZA ATTIVA

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

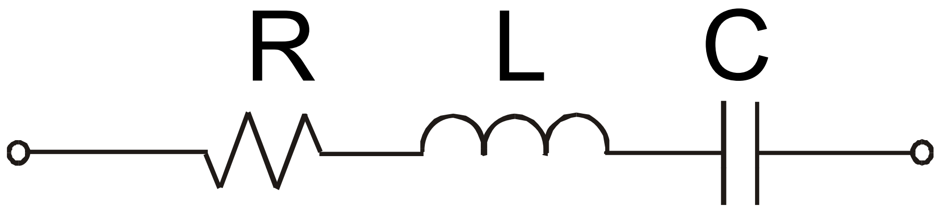
- **Bipoli risonanti – Ricerca della risonanza**

$$Im\left\{\mathbf{Y}(\omega)\right\}=0 \qquad Im\left\{\mathbf{Z}(\omega)\right\}=0$$

$$\Updownarrow$$

I e **V** in fase

Esempio: bipolo RLC serie



- **Bipoli risonanti – Ricerca della risonanza**

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = G_{eq} + jB_{eq}$$

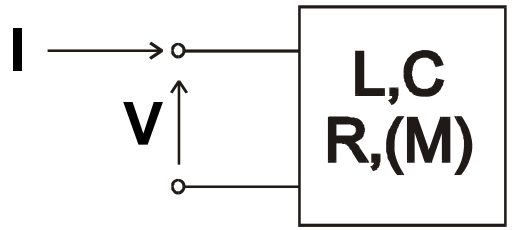
$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R_{eq} + jX_{eq}$$

In generale equazioni algebriche in ω di grado n≥2

$$\begin{cases} B_{eq}(\omega) = 0 \\ X_{eq}(\omega) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Insieme discreto di radici $\omega_{0k} > 0$, $k \geq 1$

- **Bipoli risonanti**



$$\mathbf{Z} = Z\angle\varphi$$

$$\mathbf{Y} = Y\angle\vartheta$$

Più in generale, si ha risonanza al variare di ω quando le funzioni modulo Z(ω) e Y(ω) hanno un estremo relativo (al limite Ø oppure ∞).
In pratica, esprimendo X(ω) oppure B(ω) come funzioni razionali fratte, si cercano gli zeri di numeratore e denominatore (zeri e poli).

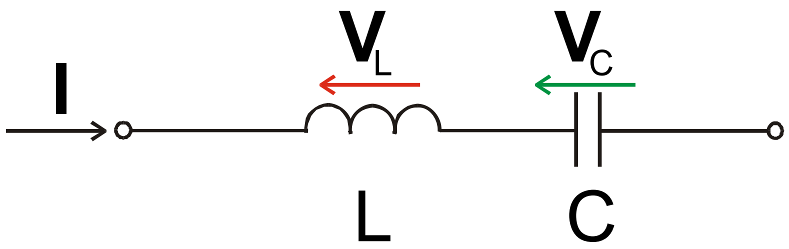
- **Bipoli risonanti**

Definizioni:

Risonanza serie – il modulo di $\mathbf{Z}(\omega)$ ha un minimo (al limite uno zero) e il modulo di $\mathbf{Y}(\omega)$ ha un massimo (al limite ∞)

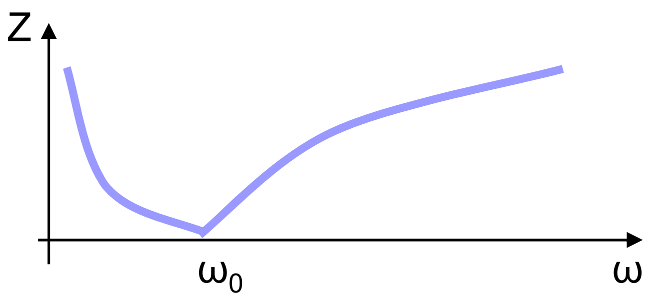
Risonanza parallelo – il modulo di $\mathbf{Z}(\omega)$ ha un massimo (al limite ∞) e il modulo di $\mathbf{Y}(\omega)$ ha un minimo (al limite uno zero)

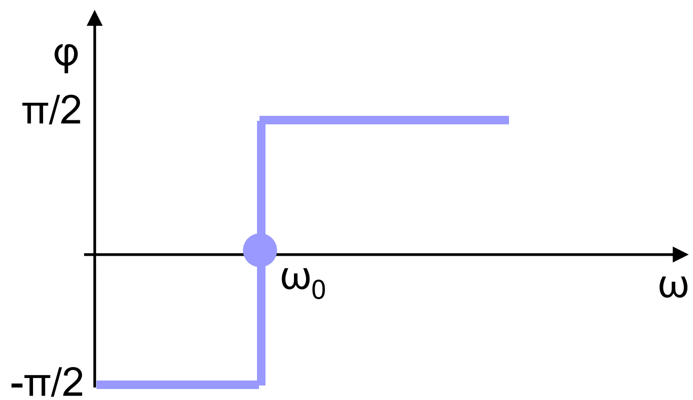
- **Bipoli risonanti – Bipolo LC serie**



$$\mathbf{z} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = z\angle\varphi = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| \angle \tan^{-1}\pm\infty$$

RISPOSTA IN FREQUENZA



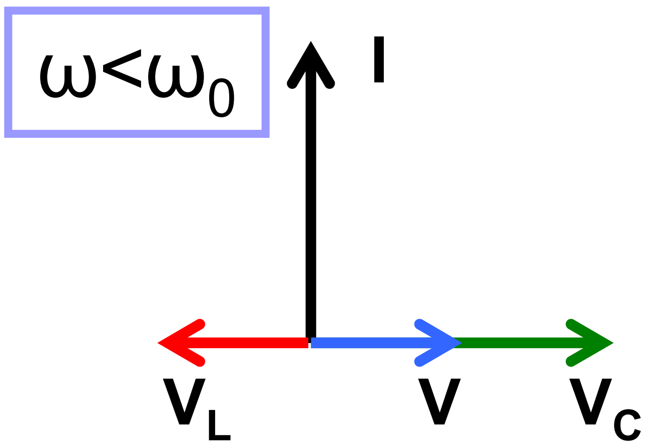


- **Bipoli risonanti – Bipolo LC serie**

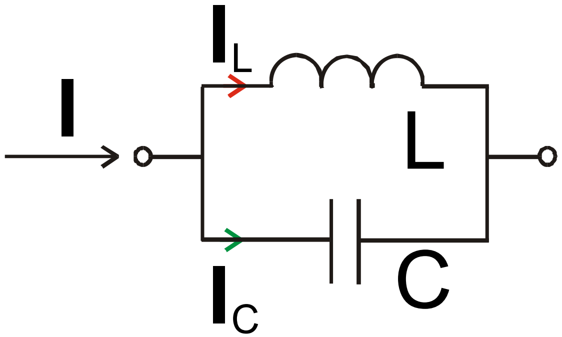
RISONANZA

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad \omega_0^2 LC - 1 = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

DIAGRAMMA VETTORIALE



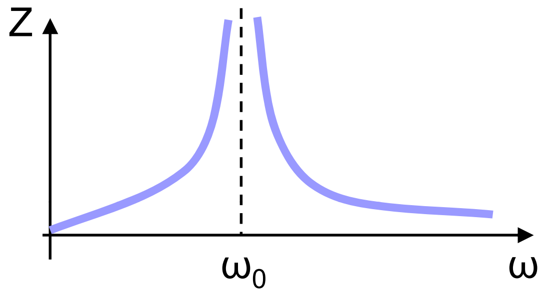
- **Bipoli risonanti – Bipolo LC parallelo**

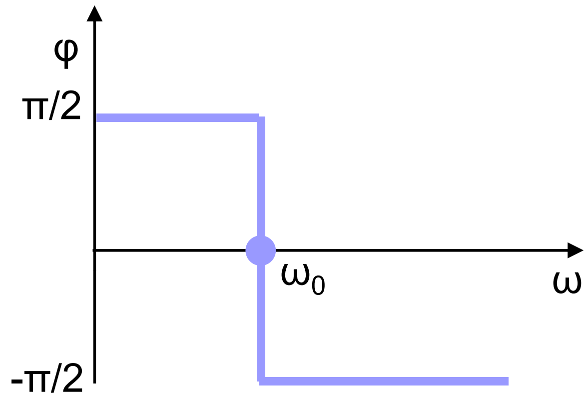


$$\mathbf{Y} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = j\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = j\,\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} = z\angle\varphi = \left|\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right| \angle \tan^{-1}\pm\infty$$

RISPOSTA IN FREQUENZA



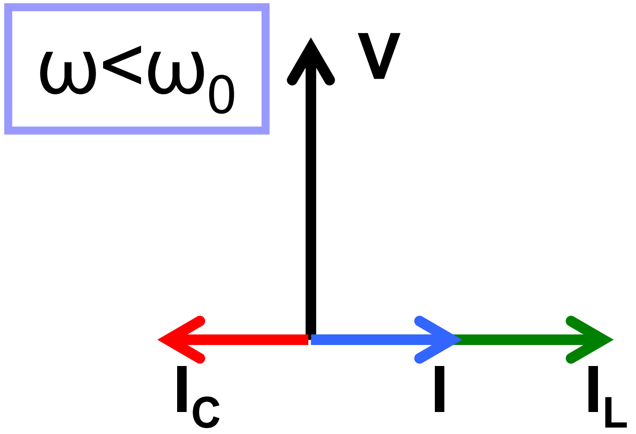


- **Bipoli risonanti – Bipolo LC parallelo**

RISONANZA

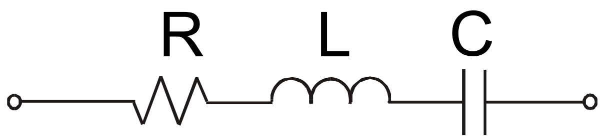
$$1-\omega_0^2 LC = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

DIAGRAMMA VETTORIALE



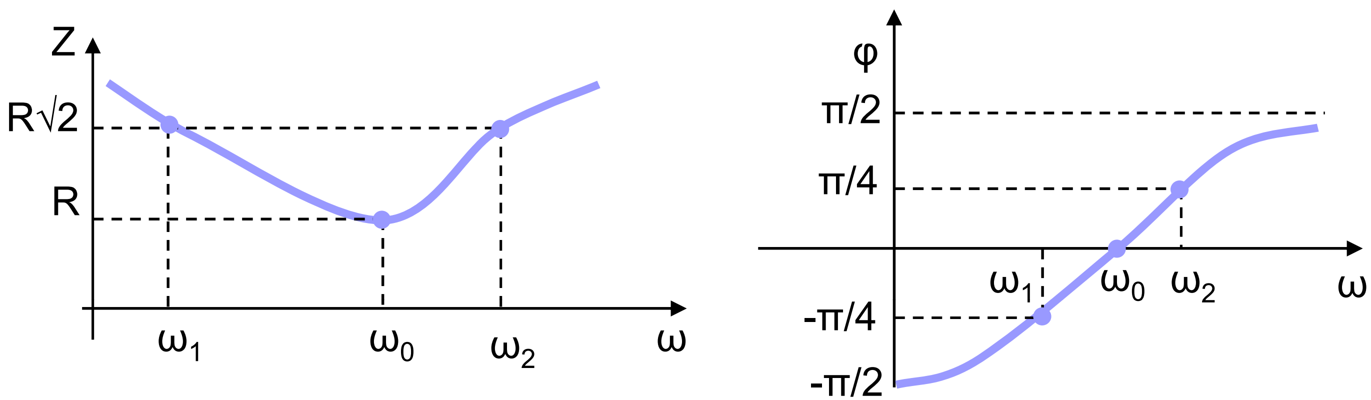
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**



$$\mathbf{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \angle \varphi = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

RISPOSTA IN FREQUENZA



Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

RISONANZA

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ Z(\omega)\ \min \end{cases}$$

SE

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \qquad\qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\min Z(\omega) = Z(\omega_0) = R}$$

Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

PULSAZIONI DI TAGLIO (1)

ω_1, ω_2 tali che $Z = R\sqrt{2}$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R\sqrt{2}$$

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = -R$$

Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

PULSAZIONI DI TAGLIO (2)

$$\omega^2 LC - \omega RC - 1 = 0$$

$$\omega^2 LC + \omega RC - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega = \frac{RC \pm \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**

LARGHEZZA DI BANDA

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L} \qquad \varphi(\omega_1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \varphi(\omega_2) = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \left(\sqrt{1 + \frac{R^2C}{4L}}\right)\omega_0 \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \left(\sqrt{1 + \frac{R^2C}{4L}}\right)\omega_0$$

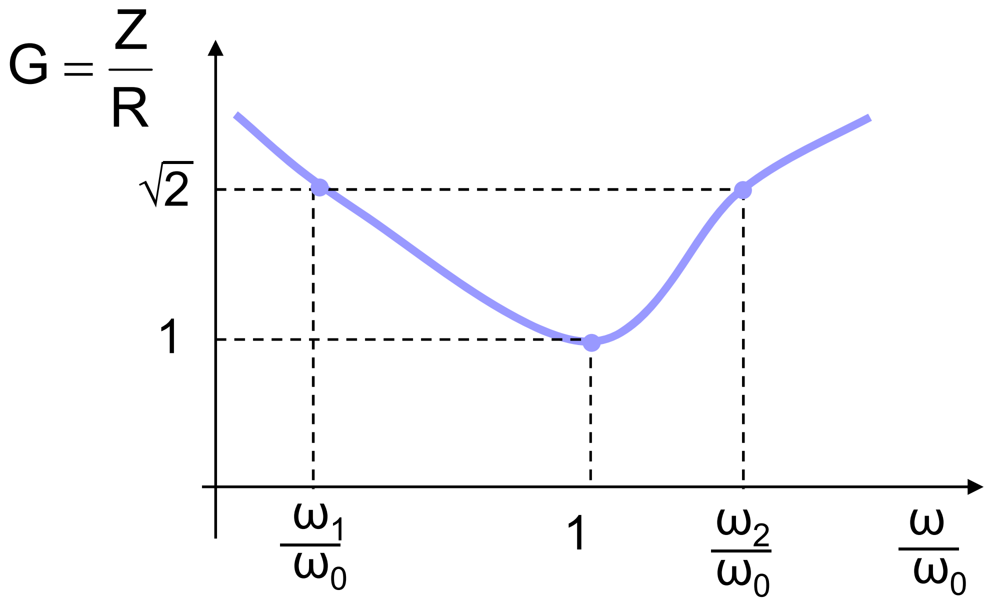
APPROSSIMATE

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \omega_0 \qquad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \omega_0}$$

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**

RISPOSTA IN FREQUENZA NORMALIZZATA



$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{Z}{R} \; [dB]$$

$$\frac{Z}{R} = 1 \qquad G_{db} = 0\,\text{dB}$$

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{2} \qquad G_{db} = 3\,\text{dB}$$

Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

FATTORE DI QUALITA'

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d}}$$

W_a= Valore massimo di energia accumulata in risonanza

W_d= Energia dissipata in un periodo in risonanza

$$\mathbf{I} = A\underline{/0} \quad \longrightarrow \quad i = A\sqrt{2}\cos\omega_0 t$$

$$\mathbf{V}_C = \frac{-j}{\omega_0 C}\mathbf{I} = \frac{A}{\omega_0 C}\underline{/-\pi/2} \quad \longrightarrow \quad v_C = \frac{A\sqrt{2}}{\omega_0 C}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

$$W_a = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv_C^{\,2} = \frac{1}{2}LA^2 2\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}C\frac{2A^2}{\omega_0^2 C^2}\operatorname{sen}^2\omega_0 t =$$

$$= LA^2\cos^2\omega_0 t + A^2\frac{LC}{C}\operatorname{sen}^2\omega_0 t = LA^2$$

Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie

FATTORE DI QUALITA'

$$W_d = RA^2 T_0 = RA^2 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$Q = 2\pi \frac{LA^2}{RA^2 2\pi}\omega_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \frac{1}{B}$$ B larghezza di banda

<u>In condizioni di risonanza</u>

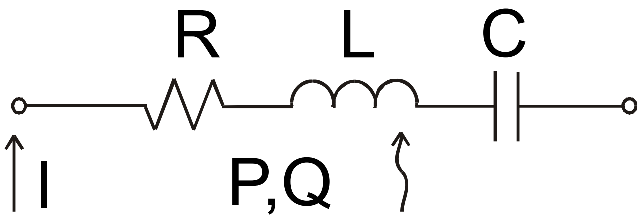
$$V = RI \qquad V_C = V_L \qquad Q = \omega_0 \frac{L}{R}$$

$$V_L = \omega_0 LI = RQI = RQ\frac{V}{R} = QV = V_C$$

V_L e V_C sono Q volte più grandi di V

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**
  - **CRITERIO ENERGETICO (1)**



$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$P = RI^2 \qquad Q = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I^2$$

$$Q = 0 \iff \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**
  - **CRITERIO ENERGETICO (2)**

Larghezza di banda B =$\omega_2 - \omega_1$

Intervallo di ω tale che la potenza reattiva non superi quella attiva

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| I^2 \le P = RI^2 \qquad Q_{max} = \left|\omega_T L - \frac{1}{\omega_T C}\right| I^2 = RI^2$$

$$\omega_T = \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \end{cases}$$

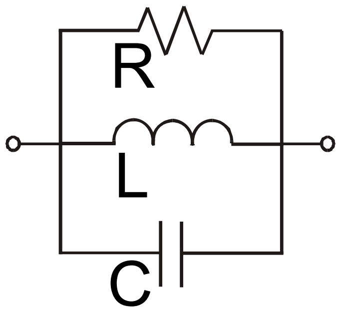
Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC serie**
  - **SELETTIVITA' DEL BIPOLO IN FREQUENZA**

$$\omega_1 \approx -\frac{R}{2L} + \omega_0 \qquad \omega_2 \approx \frac{R}{2L} + \omega_0 \qquad B = \frac{R}{L}$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \omega_0 \frac{L}{R} \xrightarrow[R \to 0]{} \infty$$

- **Bipoli risonanti – Bipolo RLC parallelo**



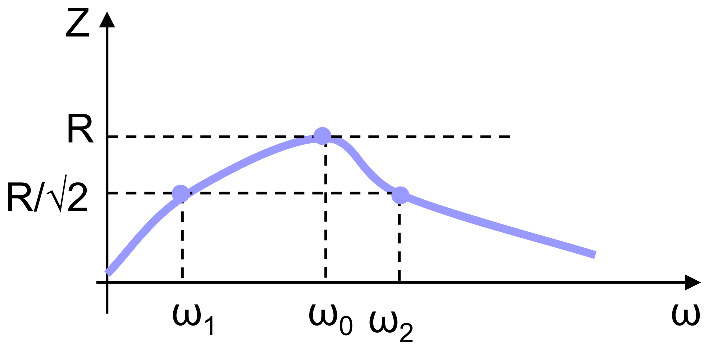
G=1/R

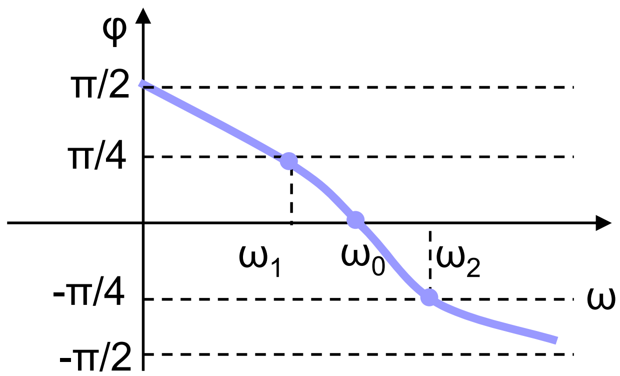
$$\mathbf{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \angle \tan^{-1}\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1}\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

Bipoli risonanti – Bipolo RLC parallelo

RISPOSTA IN FREQUENZA





RISONANZA

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ Z(\omega)\ \max \end{cases}$$

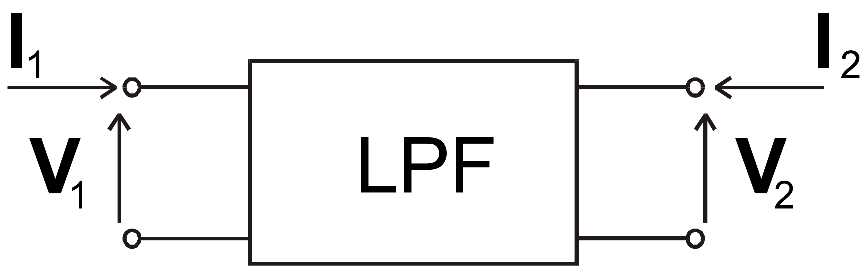
SE $\omega_0 C - \dfrac{1}{\omega_0 L} = 0$ $\qquad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\boxed{\max Z(\omega) = Z(\omega_0) = R}$$

LARGHEZZA DI BANDA $\qquad B = \dfrac{G}{C}$

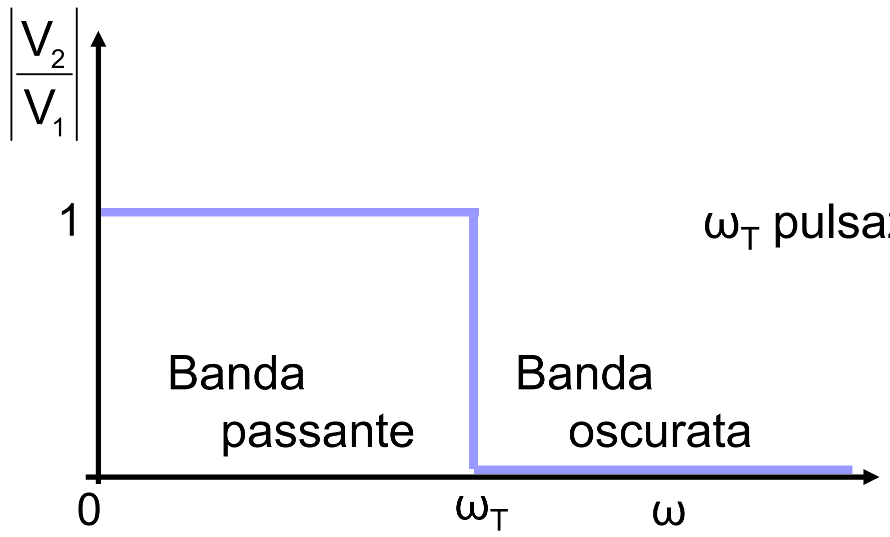
FATTORE DI QUALITA' $\qquad Q = \dfrac{\omega_0}{B} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

- **Filtro passa-basso ideale (LPF)**



Funzione di trasferimento del filtro

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_{I_2=0} = \mathbf{f}(\omega)$$

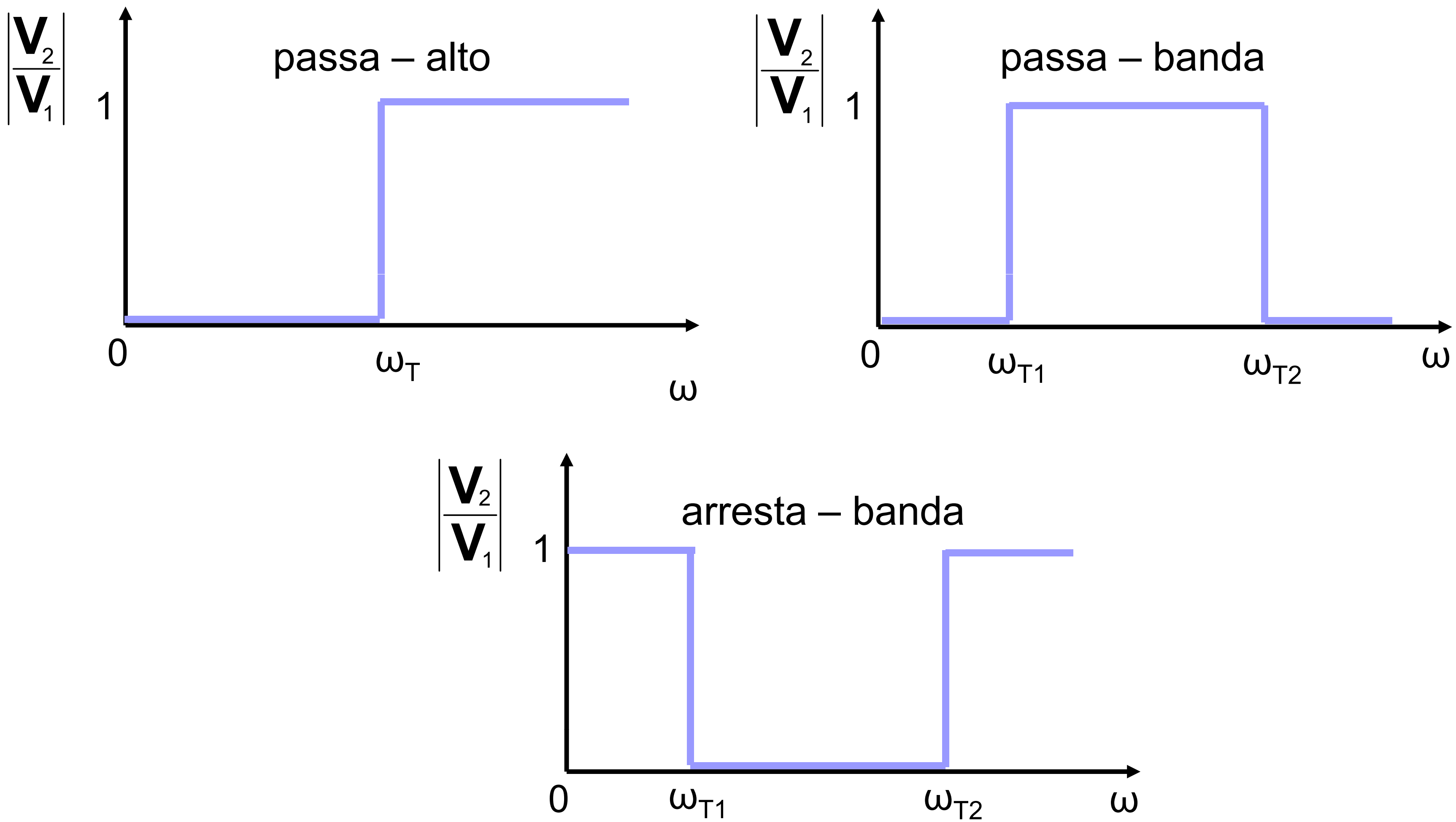


ω_T pulsazione di taglio

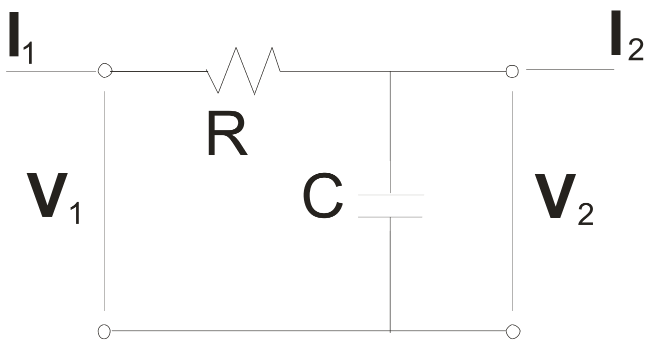
(Esempio:ricevitore radio)

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Altri filtri ideali**



- **Filtro passa-basso RC**



$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_{I_2=0} = \frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R - j\dfrac{1}{\omega C}}$$

Taglio ω_T tale che $\quad R = \dfrac{1}{\omega_T C} \qquad \omega_T = \dfrac{1}{RC}$

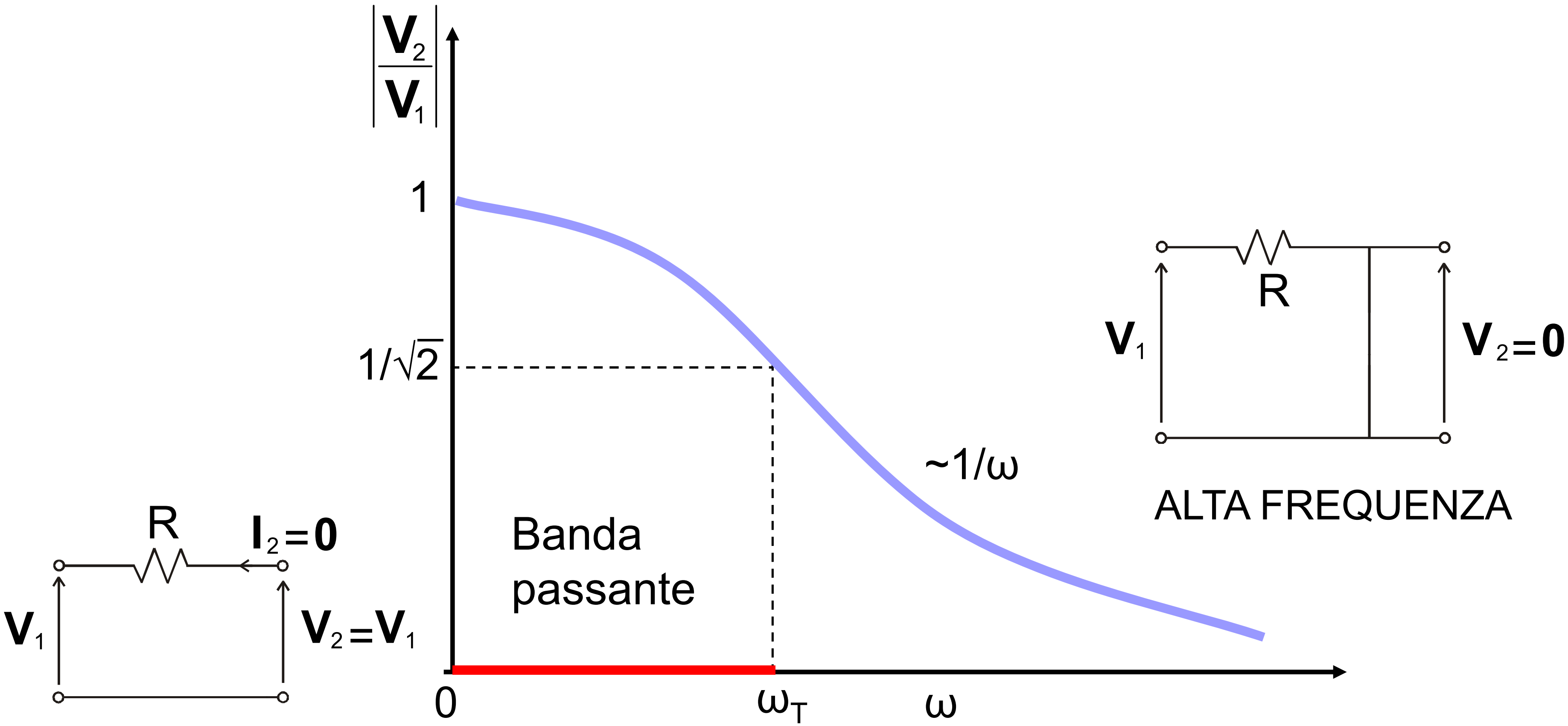
$$\omega \ll \omega_T \qquad \frac{1}{\omega C} \gg R \qquad \left|\frac{V_2}{V_1}\right| \to 1$$

$$\omega = \omega_T \qquad \left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega \gg \omega_T \qquad \frac{1}{\omega C} \ll R \qquad \left|\frac{V_2}{V_1}\right| \approx \frac{1}{\omega RC}$$

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Filtro passa-basso RC**

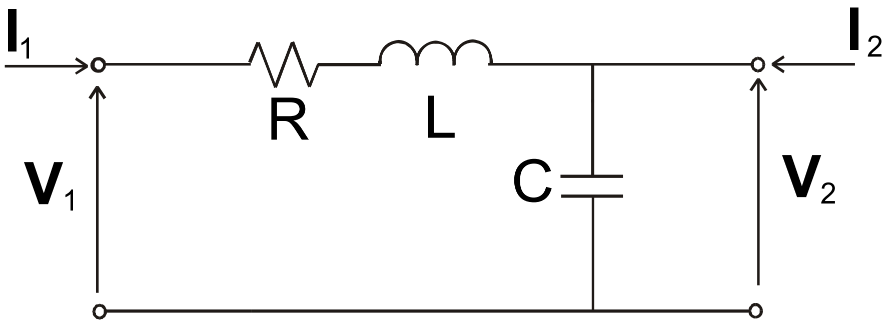


BASSA FREQUENZA

NOTA: “bassa” e “alta” frequenza rispetto a ω_T, ω_0

Risposta in frequenza di un bipolo passivo lineare

- **Filtro passa-basso RLC**



$$\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0} = \frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ Risonanza

$$\omega \ll \omega_0 \qquad \frac{1}{\omega C} \gg \omega L \qquad \frac{1}{\omega C} \gg R \qquad \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| \to 1$$

$$\omega = \omega_0 \qquad \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

$$\omega \gg \omega_0 \qquad \frac{1}{\omega C} \ll \omega L \qquad \omega L \gg R \qquad \left|\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right| \approx \frac{1}{\omega^2 LC}$$

- **Filtro passa-basso RLC**

Il filtro RLC è più selettivo del filtro RC $\left(\frac{1}{\omega^2} < \frac{1}{\omega}\right) \quad \omega > 1$