Università degli Studi di Pavia
Facoltà di Ingegneria

Corso di

Teoria dei circuiti

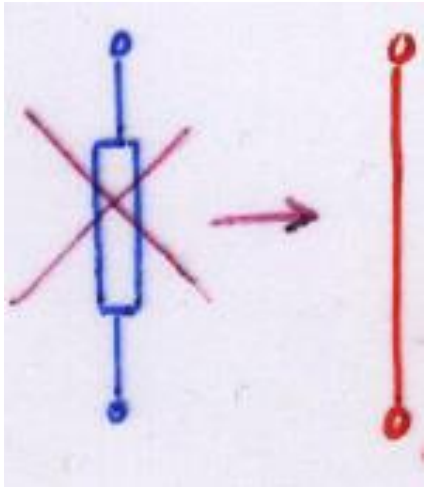
Topologia dei circuiti

Dipartimento di Ingegneria Elettrica

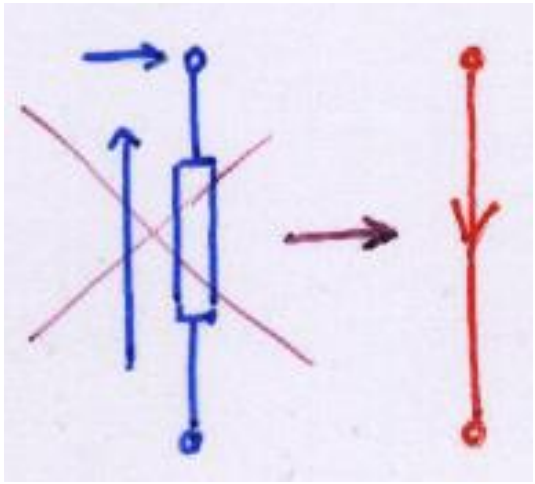
Topologia dei circuiti

Studio della struttura di un circuito dal punto di vista delle connessioni dei bipoli senza riguardo alla loro natura.

BIPOLO = un lato con due nodi.



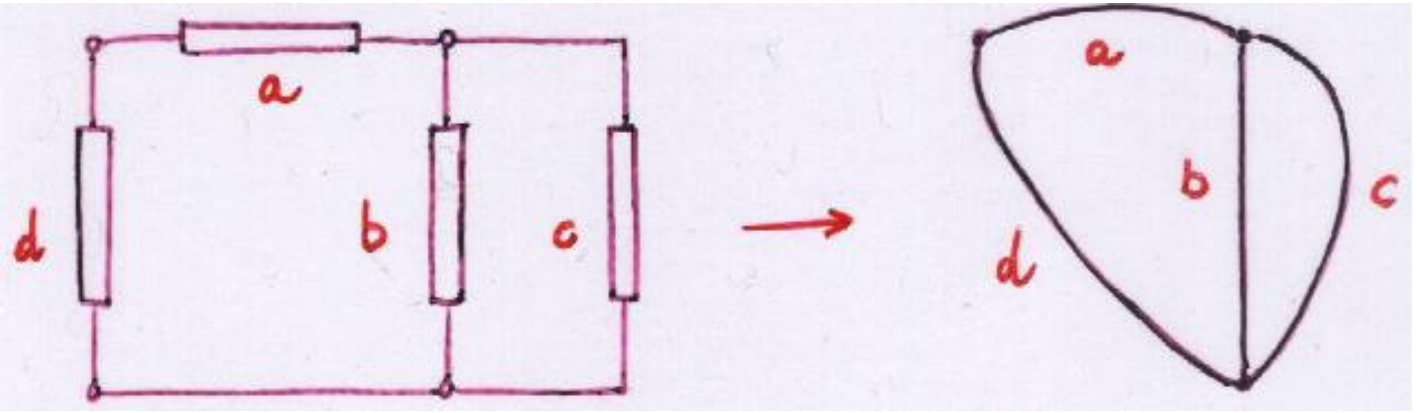
Lato non orientato



Lato orientato

Topologia dei circuiti

GRAFO di un circuito = il suo “scheletro”.

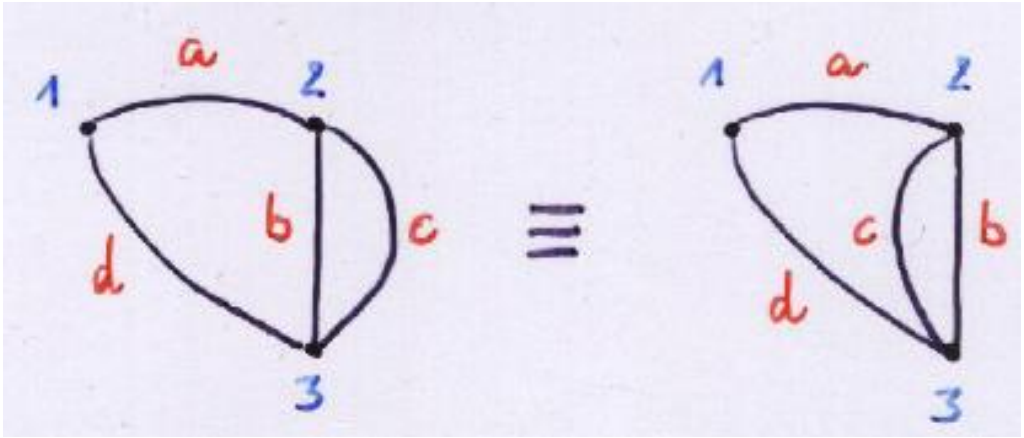


circuito

grafo

Topologia dei circuiti

GRAFO = insieme di n NODI $(n_1,n_2,\ldots,n_n)$ e di ℓ LATI $(\ell_1, \ell_2,\ldots,\ell_\ell)$, con $\ell \geq n$, tale che ogni lato incide in due nodi munito di una LEGGE DI CONNESSIONE (in forma grafica).

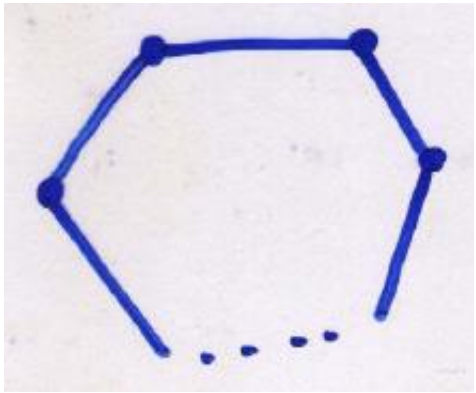


n = 3 (1,2,3)

ℓ = 4 (a,b,c,d)

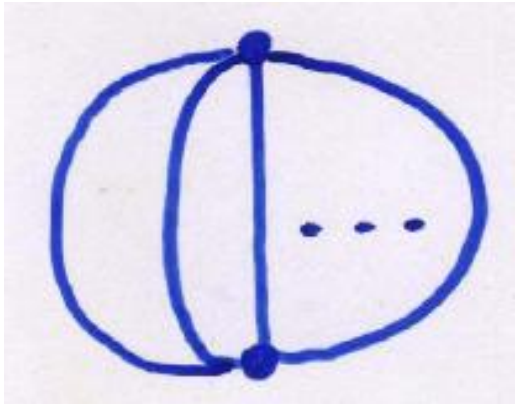
Topologia dei circuiti

CONNESSIONE SERIE



$\ell = n$

CONNESSIONE PARALLELO



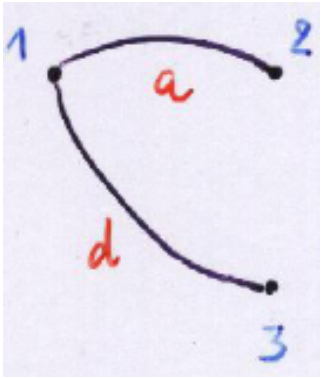
$n = 2$

$\ell > n$

In generale, connessioni serie-parallelo e parallelo-serie : $\ell \geq n$

Topologia dei circuiti

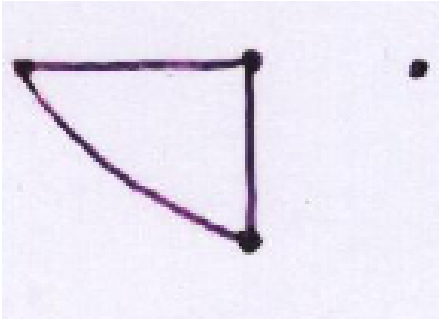
SOTTOGRAFO = grafo ottenuto da un grafo assegnato rimuovendo alcuni lati.



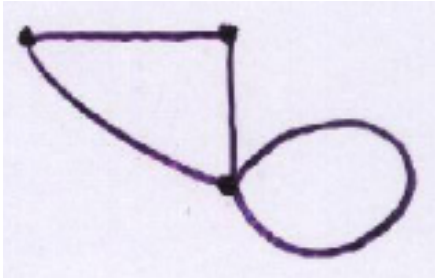
n = 3 (1,2,3)

ℓ = 2 (a,d)

GRAFO ANOMALO

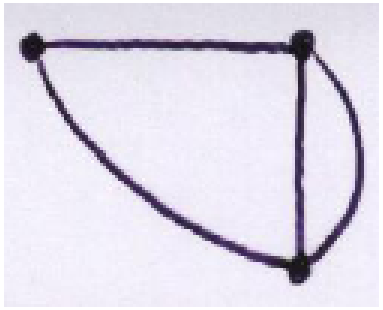


OPPURE

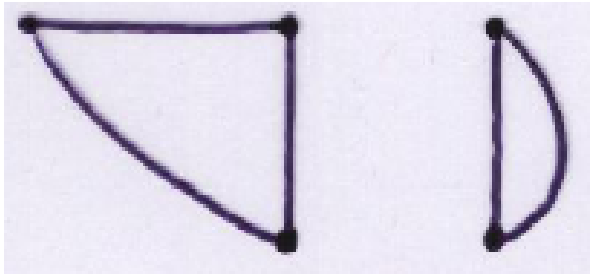


Topologia dei circuiti

GRAFO CONNESSO

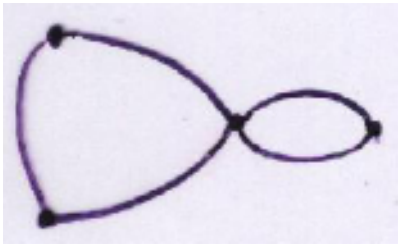


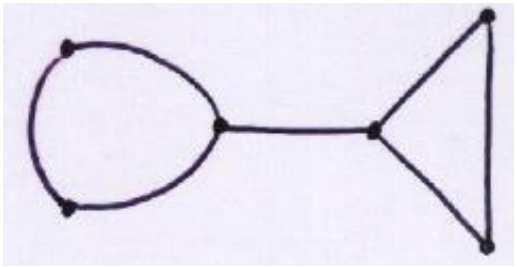
GRAFO NON CONNESSO



Sussiste almeno un collegamento fra due nodi

GRAFO SEPARABILE

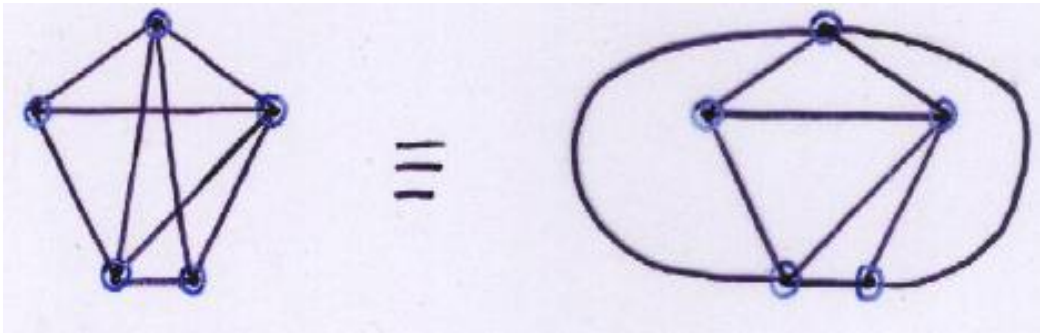




E’ costituito da due sottografi connessi in un nodo o in un lato.

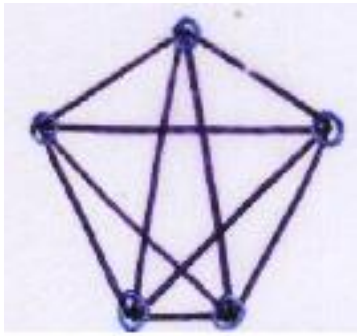
Topologia dei circuiti

GRAFO PIANO



Si può tracciare in un piano senza che i lati si intersechino

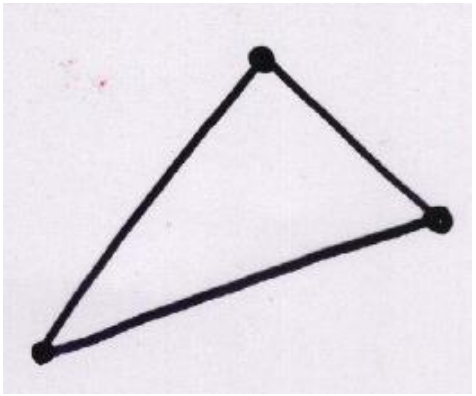
GRAFO NON PIANO

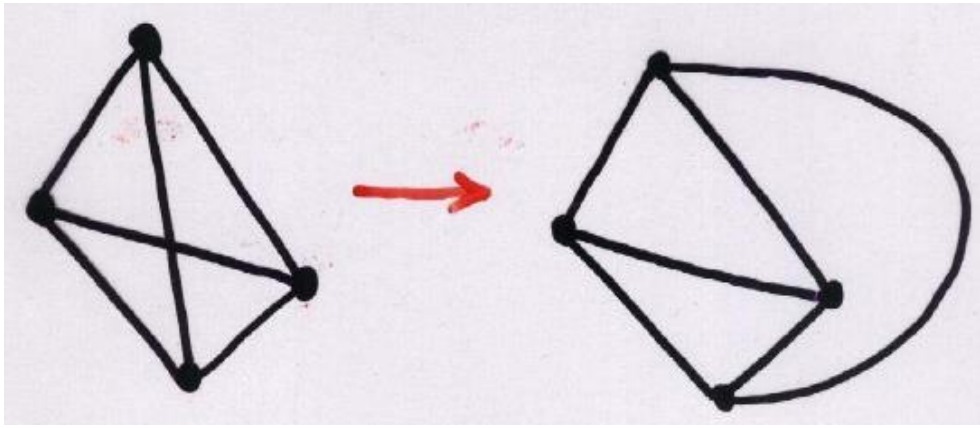


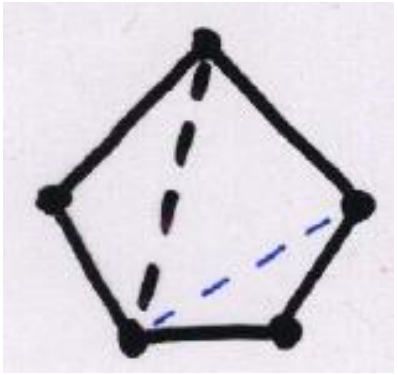
Poligono di Kuratowski completo

Topologia dei circuiti

GRAFI PIANI





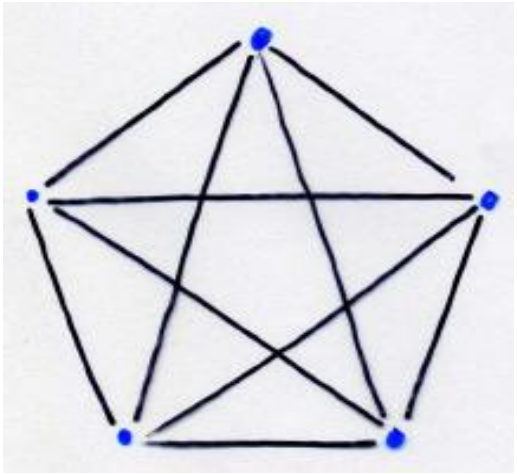


Poligono di Kuratowski:

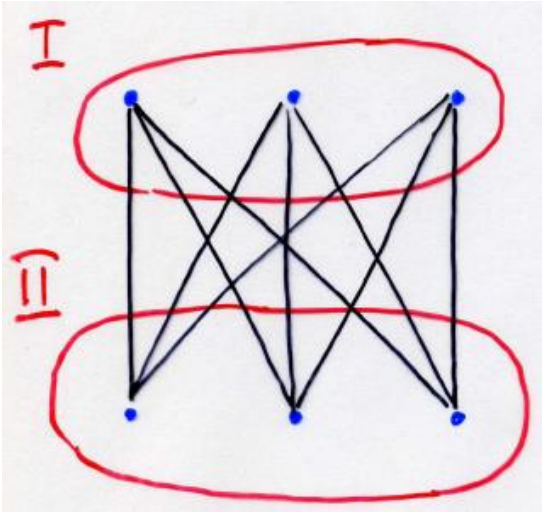
- + alcune diagonali ⟶ incompleto
- + tutte le diagonali ⟶ completo (grafo non piano)

Topologia dei circuiti

I DUE GRAFI NON PLANARI PIU' SEMPLICI



K_5 (5 nodi)
Grafo pentanodale completo
(non bipartito)



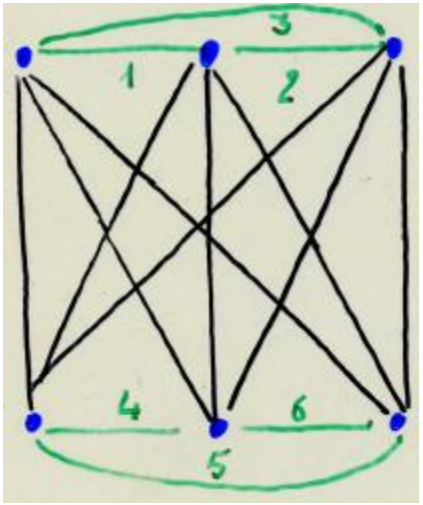
$K_{3,3}$ (6 nodi)
Grafo bipartito

Teorema di Kuratowski (1929):
Un grafo è planare se e solo se NON CONTIENE né K_5 né $K_{3,3}$ fra i suoi minori.

Topologia dei circuiti

GRAFO COMPLETO : Comprende max numero di lati compatibile con 'n' senza ripetizioni (1 solo lato per qualunque coppia di nodi).

$$\ell_{max} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$



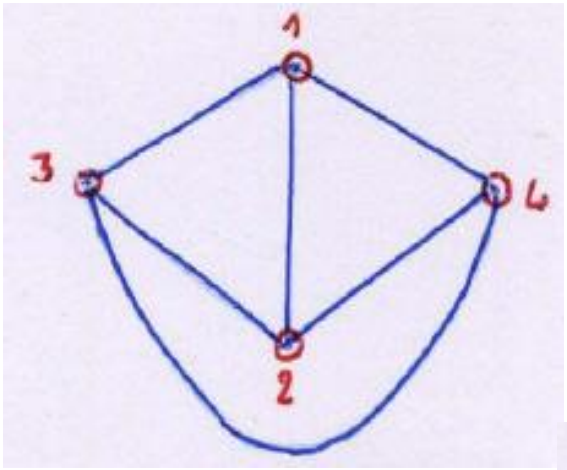
Esempio:

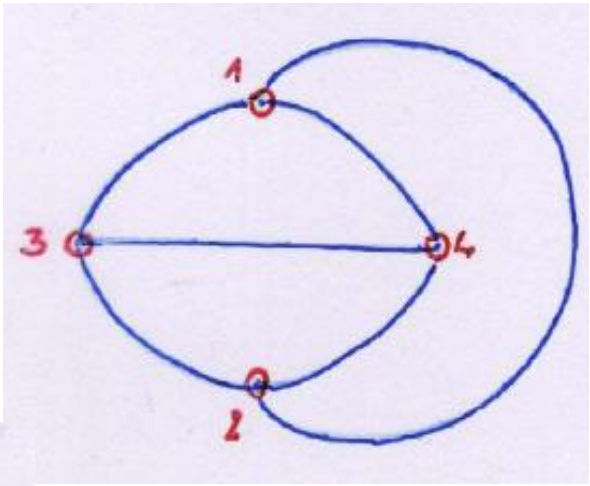
K_5 ha $\binom{5}{2} = 10$ lati perché è completo

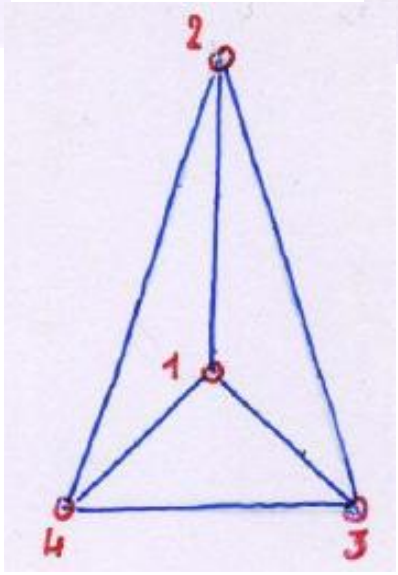
$K_{3,3}$ ha $\binom{6}{2} - 6 = 15 - 6 = 9$ lati perché è bipartito

Topologia dei circuiti

TRE GRAFI TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI



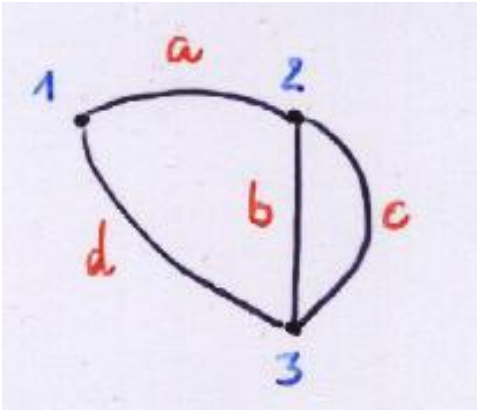




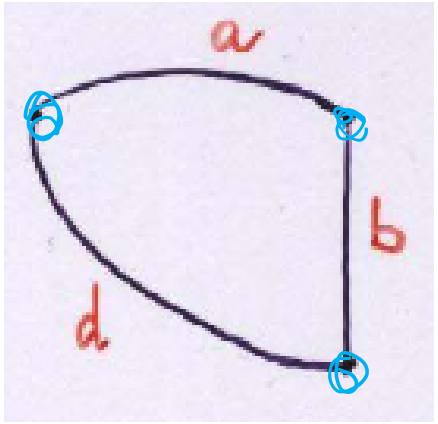
Topologia dei circuiti

Nel seguito verranno trattati GRAFI PIANI CONNESSI NON SEPARABILI.

MAGLIA di un grafo:
Insieme di lati (sottografo connesso) tale che in ogni nodo incidono due e due soli lati



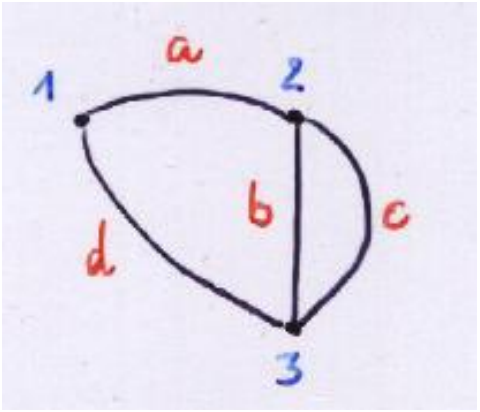
M = { a,b,d }



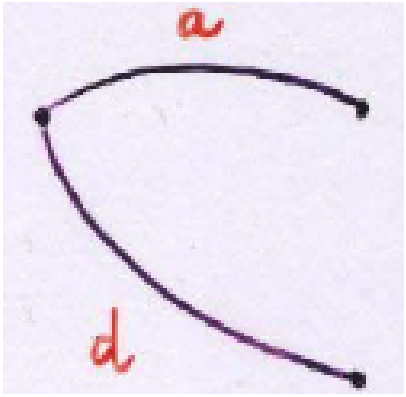
Topologia dei circuiti

TAGLIO di un grafo:
Insieme di lati tali che:

- tagliando tutti i lati dell'insieme, il grafo è separato
- tagliando tutti i lati dell'insieme meno uno, il grafo è connesso

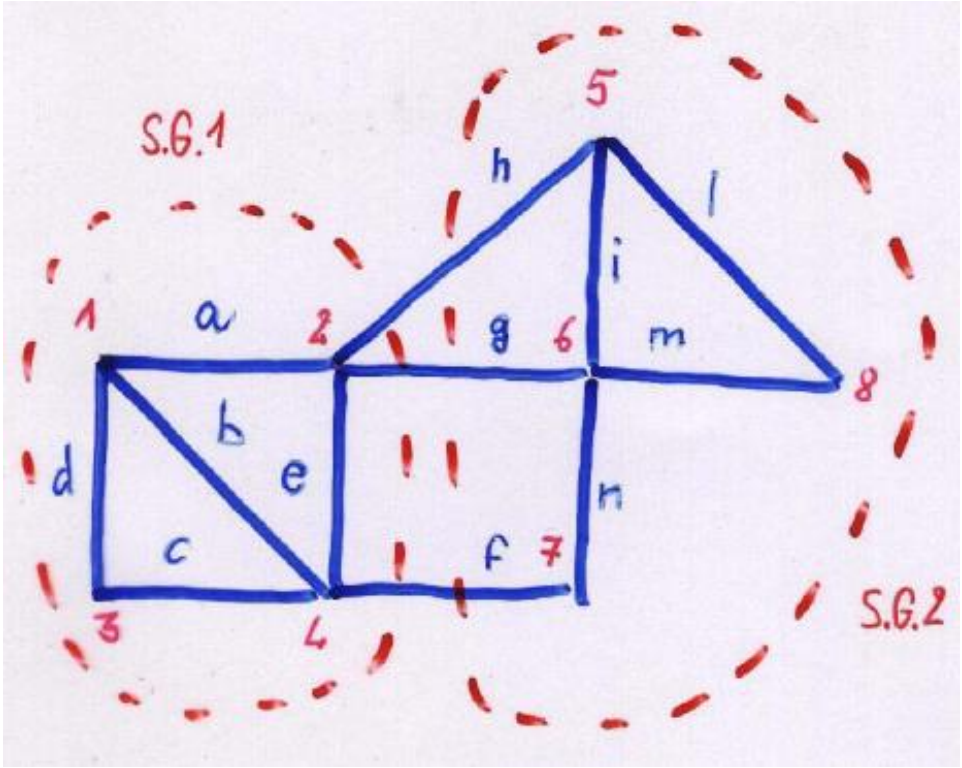


T = { a,d }



Topologia dei circuiti

UN CASO GENERALE



T = { f,g,h }

S.G.1 = { 1,2,3,4 } U { a,b,c,d,e }

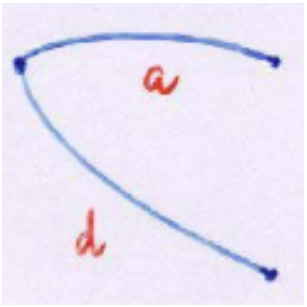
S.G.2 = { 5,6,7,8 } U { i,l,m,n }

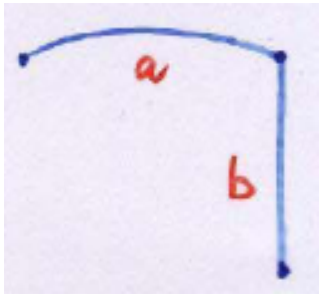
I lati dell'insieme T connettono un nodo di S.G.1 con un nodo di S.G.2.

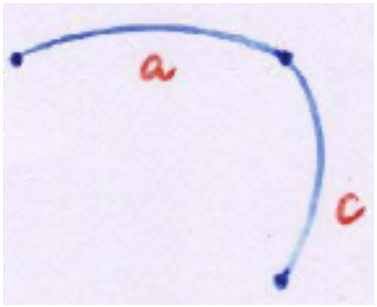
Topologia dei circuiti

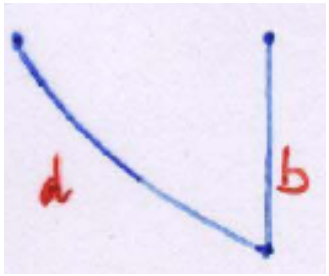
ALBERO di un grafo:

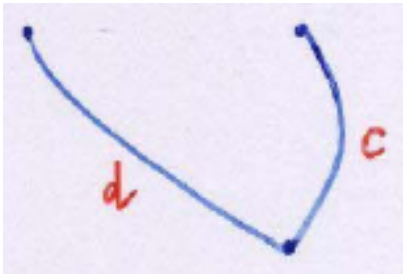
- sottografo che contiene tutti i nodi, ma non ha maglie;
- l'albero ha n-1 lati.







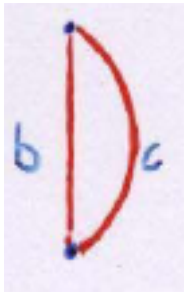


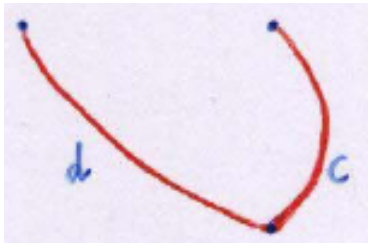


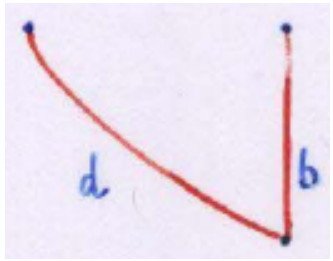
Topologia dei circuiti

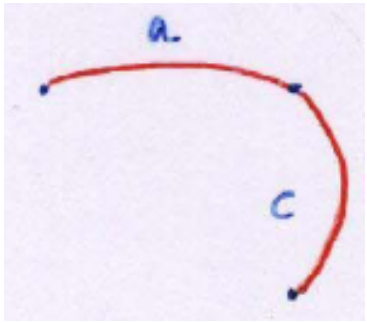
COALBERO di un grafo:

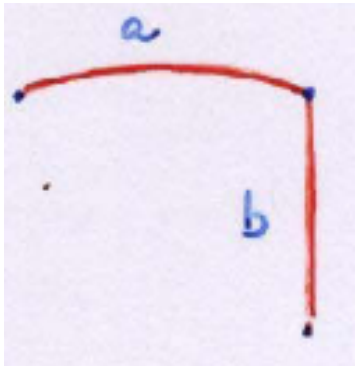
- sottografo complementare di un albero;
- il coalbero ha ℓ-n+1 lati.











Topologia dei circuiti

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA TEORIA DEI GRAFI

Qualunque grafo si prenda in considerazione, esiste almeno una scomposizione del grafo in una coppia ALBERO - COALBERO

Topologia dei circuiti

TAGLI FONDAMENTALI

Preso un lato d'albero, aggiungendo solo lati di coalbero che incidono ad una sua estremità (ovvero lati di coalbero che sono elementi ponte fra i due sottografi ottenuti tagliando il lato d'albero), si ottiene un taglio fondamentale.

Il numero dei tagli fondamentali è n-1.

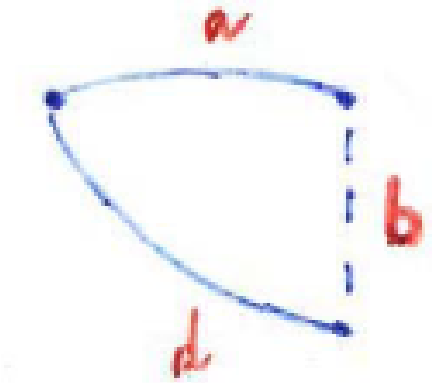
TAGLIO : a (albero) +
b,c (coalbero)

Topologia dei circuiti

MAGLIE FONDAMENTALI

Preso un lato di coalbero, aggiungendo solo lati d'albero (che connettono i nodi del lato di coalbero), si ottiene una maglia fondamentale.

Il numero delle maglie fondamentali è ℓ-n+1.

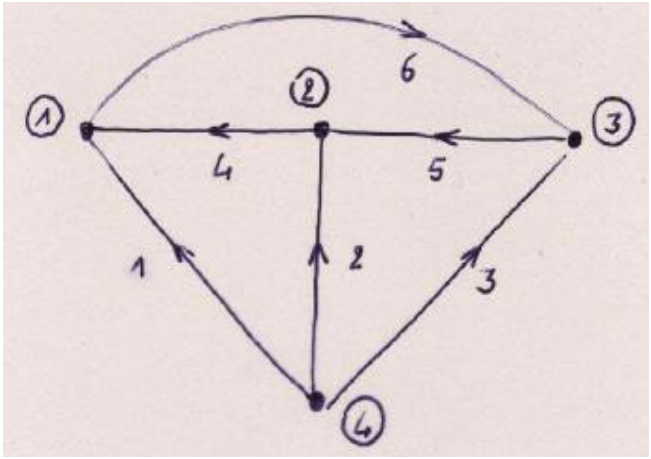


MAGLIA : b (coalbero) +
a,d (albero)

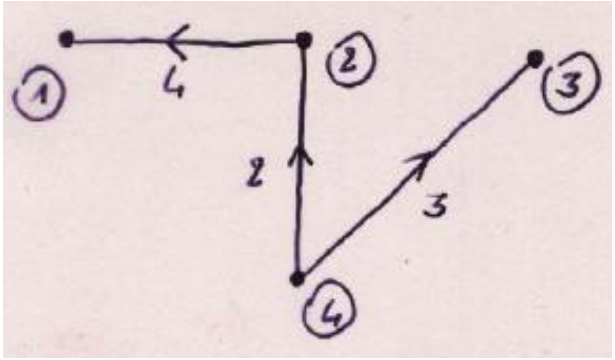
Topologia dei circuiti

ESEMPIO DI ANALISI RELATIVO AD UN GRAFO PIANO

GRAFO



ALBERO



Topologia dei circuiti

TAGLI FONDAMENTALI

$T_1 = \{2,1,5,6\}$

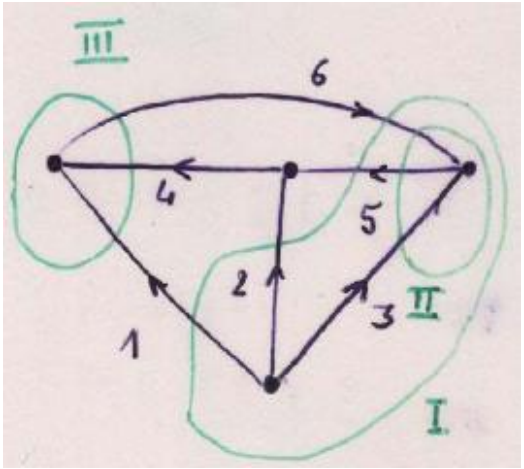
$T_2 = \{3,5,6\}$

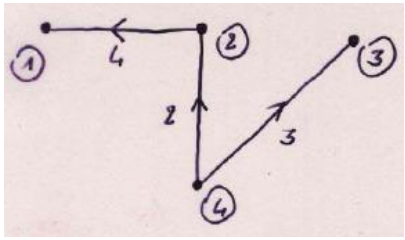
$T_3 = \{4,1,6\}$

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$$

$$[C][I] = 0$$

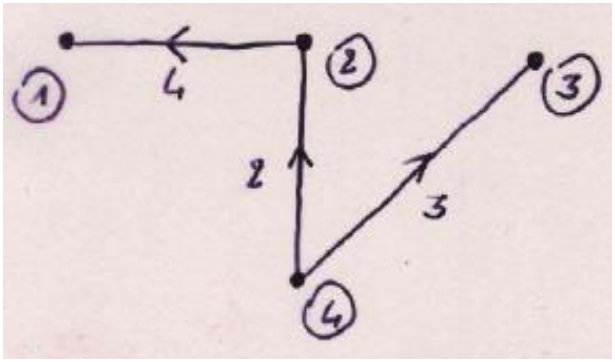
n-1 KCL



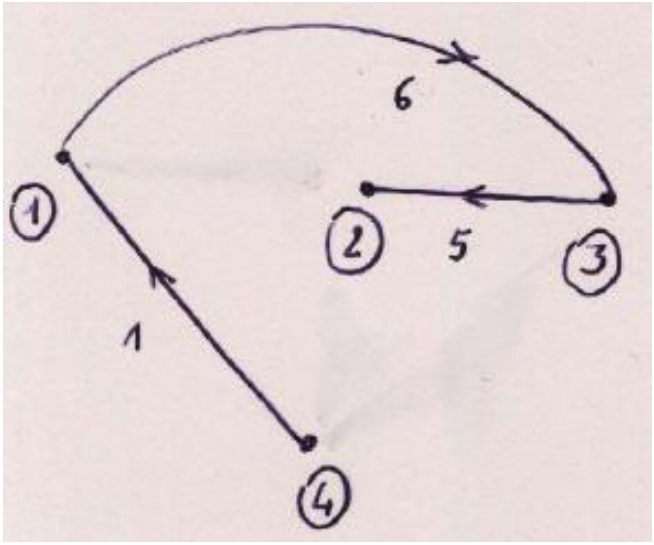


Topologia dei circuiti

ALBERO



COALBERO



Topologia dei circuiti

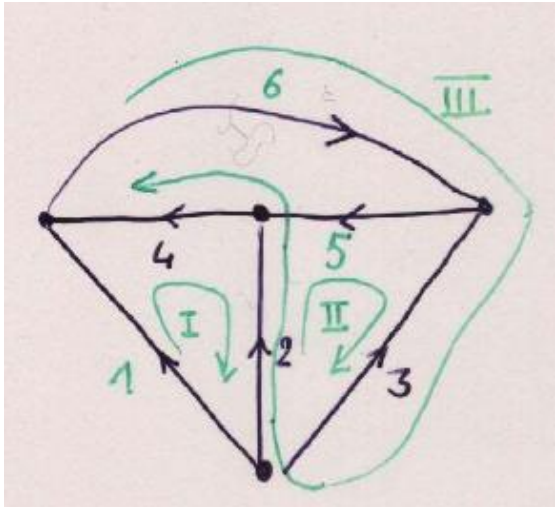
MAGLIE FONDAMENTALI

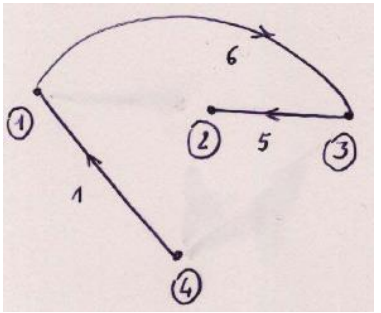
$MF_1 = \{1, 2, 4\}$

$MF_2 = \{5, 2, 3\}$

$MF_3 = \{6, 3, 2, 4\}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ MF_1 \\ MF_2 \\ MF_3 \end{matrix}$$





$$[M][V] = 0$$

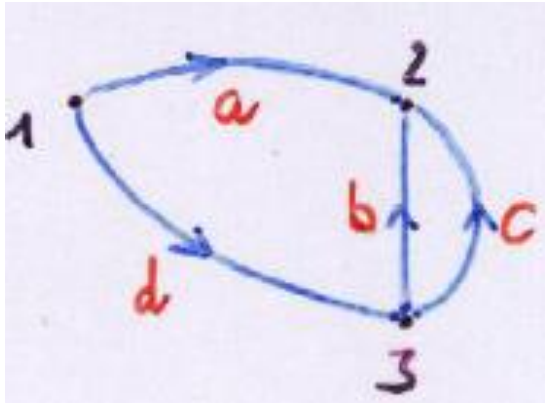
ℓ-n+1 KVL

Topologia dei circuiti

In alternativa alla descrizione “albero-coalbero”, un grafo può essere descritto come:

- INCIDENZA LATI – NODI
- APPARTENENZA LATI – MAGLIE

GRAFO ORIENTATO: sono definite convenzioni sui lati.



Topologia dei circuiti

INCIDENZA LATI-NODI: Un grafo è definito dalla MATRICE DI INCIDENZA di ciascun lato nei due nodi:

$C_t(n,\ell)$: 0 LATO NON INCIDE

1 LATO PARTE

-1 LATO ARRIVA

NODO	a	b	c	d
1	1	0	0	1
2	−1	−1	−1	0
3	0	1	1	−1

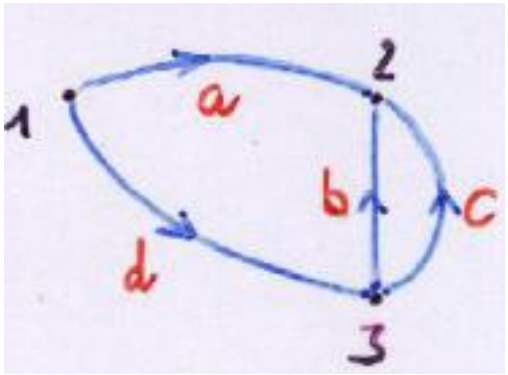
LATO

In ogni riga: i lati incidenti nel nodo

$$KCL \Leftrightarrow [C_t][I] = 0$$

n KCL non sono indipendenti !

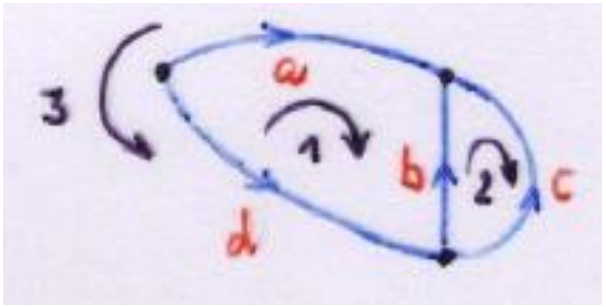
$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ \dots \\ I_\ell \end{bmatrix}$$



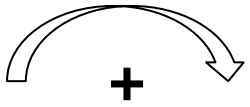
Topologia dei circuiti

Un grafo piano (tracciato senza che i lati si intersechino) presenta:

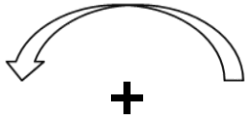
- “m” maglie interne (senza lati interni)
- una maglia esterna



M.I. = 1,2



M.E. = 3



Topologia dei circuiti

APPARTENENZA LATI-MAGLIE: Un grafo piano è definito dalla MATRICE DI APPARTENENZA di ciascun lato alle due maglie.

M_t (m+1,ℓ): 0 LATO NON APPARTIENE

1 LATO APPARTIENE CONCORDE

-1 LATO APPARTIENE DISCORDE

MAGLIA

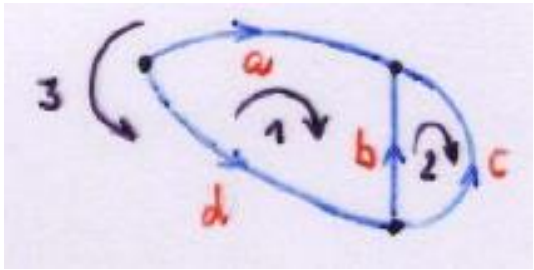
	a	b	c	d
1	1	−1	0	−1
2	0	1	−1	0
3	-1	0	1	1

LATO

In ogni riga: i lati appartenenti alla maglia.

KVL $\Leftrightarrow$ $[M_t][V] = 0$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ V_\ell \end{bmatrix}$$



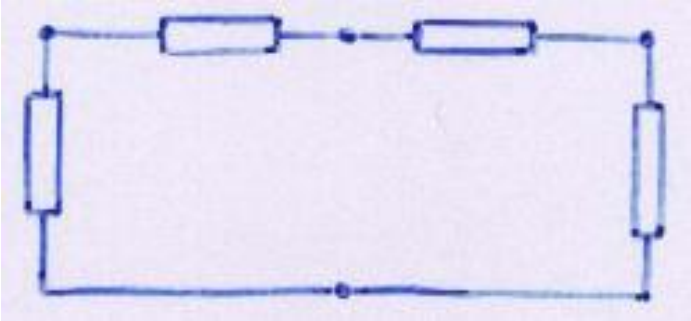
m+1 KVL non sono indipendenti !

Topologia dei circuiti

Il numero di maglie interne in un circuito piano è ℓ-n+1 = m
Ragioniamo per induzione:

Circuito con una maglia (interna)

m = 1

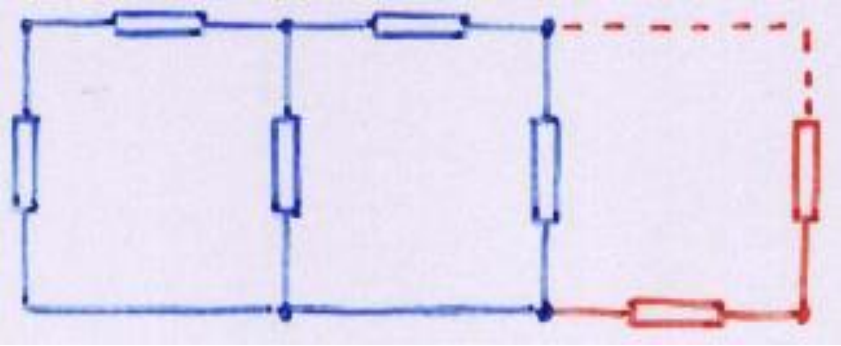


ℓ = n
ℓ-n+1 = 1

VERO

Circuito con ‘m’ maglie interne

m > 1



Topologia dei circuiti

Supponiamo vera la proprietà per m > 1

Aggiungiamo una maglia con: k lati
e: k-1 nodi

Si ottiene un circuito con: ℓ+k lati
e: n+k-1 nodi

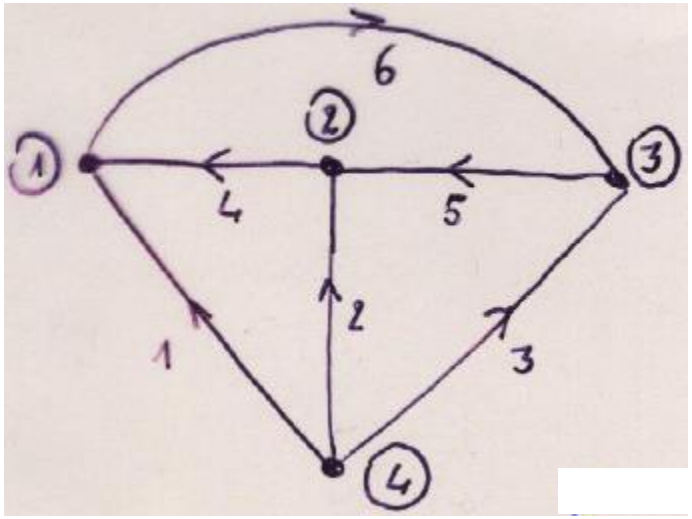
Dunque

$$(\ell + k) - (n + k - 1) + 1 = \ell - n + 2$$
$$= (\ell - n + 1) + 1$$

VERO

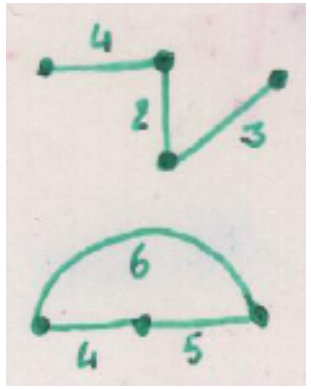
Topologia dei circuiti

Dato un grafo, il numero degli alberi n_t è uguale al numero dei minori della matrice di incidenza totale $[C_t]$ aventi rango n-1



$$C_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix}$$

$$\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3 \quad \ell_4 \quad \ell_5 \quad \ell_6$$

C’ det [C’] ≠ 0 → { ℓ_2,ℓ_3,ℓ_4 } è un ALBERO

C’’ det [C’’] = 0 → { ℓ_4,ℓ_5,ℓ_6 } NON è un albero